



СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

# Динамика многофазных сред

НОВОСИБИРСК 1981

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКИ

ДИНАМИКА МНОГОФАЗНЫХ  
СРЕД

(материалы У Всесоюзного семинара  
"Численные методы решения задач фильтрации многофазной  
несжимаемой жидкости")

Под редакцией  
академика Н.Н.Яненко

Новосибирск 1981

## ОБЗОР РАБОТ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Р.М. Кац, В.Б. Таранчук

Проблема гидродинамической неустойчивости – одна из наиболее фундаментальных в гидродинамике. Гидродинамическая неустойчивость играет большую роль во многих явлениях природы и техники, например возникновение морских волн, тепловая конвекция, кризис сопротивления при обтекании криволинейных профилей и т.д.

Интерес к неустойчивости фильтрационных течений вызван, в первую очередь, в связи с проблемой полноты извлечения нефти из недр. Как известно, добыча нефти осуществляется, в большинстве случаев, путем вытеснения ее из пласта другим агентом. От того, каким будет характер процесса вытеснения, во многом зависит величина безводной и конечной нефтеотдачи. Вторжение вытесняющего агента в нефтенасыщенную область в виде отдельных языков приводит к снижению нефтеотдачи. Образование и дальнейший рост языков вытесняющего агента тесно связаны с неустойчивостью фильтрационных потоков.

Теоретическое и экспериментальное изучение фильтрационной неустойчивости началось с рассмотрения простейшей модели совместного течения двух жидкостей с различными физическими свойствами в пористой среде. При теоретическом изучении для этой модели область течения разбивается на две однородных подобласти, разделяемые поверхностью, именуемой границей раздела или фронтом вытеснения. В такой постановке задача о фильтрационной неустойчивости сводится к двум классическим типам неустойчивости

поверхностей раздела – неустойчивости Гельмгольца и Тейлора.

Неустойчивость Гельмгольца [ 1 ] связана с различием касательных составляющих скоростей на границе раздела по разные от нее стороны.

Неустойчивость Тейлора [ 2 ] в простейшем виде – это динамическая неустойчивость поверхности раздела, когда тяжелая жидкость вытесняется более легкой, расположенной под первой. Следует отметить, что развитие тейлоровской неустойчивости может сопровождаться гельмгольцевской неустойчивостью вдоль границы образующихся языков, где возникает разница касательных составляющих скорости. Тейлоровская неустойчивость наблюдается также, когда более вязкая жидкость вытесняется в щелевой модели или пористой среде менее вязкой [ 3 ].

Первые работы по исследованию неустойчивости границы раздела двух фильтрующихся жидкостей появились в 50-х годах [ 3-10 ]. В большинстве из них для теоретического исследования устойчивости используются методы теории малых возмущений.

Остановимся на некоторых результатах этих работ. Пусть одна жидкость вытесняет другую из тонкого бесконечного пласта, угол наклона которого к горизонту равен  $\alpha$ . Невозмущенная граница раздела жидкостей – прямая линия, вектор скорости фильтрации  $W = \text{const}$  ортогонален границе раздела. Требуется описать поведение границы раздела после внесения в нее малых возмущений. Если возмущения будут возрастать со временем, то граница раздела считается неустойчивой. В противном случае, т.е. когда возмущения затухают, границу раздела считают устойчивой.

Обычно исследуется эволюция возмущений специального вида.

$$y(x,t) = \epsilon \cdot e^{\omega t + i\beta x}, \quad \beta \in \Gamma, \quad \epsilon > 0 \quad (I)$$

Здесь  $\epsilon$  – начальная амплитуда возмущения, которая считается достаточно малой,  $\omega$  – в общем случае "комплексная" частота, характеризующая скорость волны возмущения,  $\beta$  – волновое число, или действительная частота ( $\beta > 0$ ), определяющая масштаб возмущения в направлении оси  $x$ . Если на границе раздела принимаются условия непрерывности давления и нормальной составляющей скорости фильтрации, то, используя линейную теорию возмущений, можно получить

$$\omega = \frac{\varphi}{m} \left( -\lambda \cdot W - \frac{\Delta \varphi \cdot g \cdot \sin \alpha}{C_1^{-1} - C_2^{-1}} \right),$$

$$\lambda = (C_1 - C_2) \cdot (C_1 + C_2)^{-1}, \quad \Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1,$$
(2)

где  $m$  - пористость,  $C_i = k_i / \mu_i$ ,  $k_i$  - проницаемость в области течения  $i$ -ой жидкости,  $\varphi_i, \mu_i$  - плотности и вязкости жидкостей.

Условие устойчивости границы раздела определяется знаком  $\omega$ . Если  $\omega < 0$ , возмущения затухают - граница устойчива, при  $\omega > 0$  амплитуда возмущений возрастает по экспоненциальному закону - граница неустойчива. Физическое решение получается как действительная часть общего решения

$$\chi = W \cdot t + \varepsilon \cdot e^{\omega t} \cdot \cos \vartheta x.$$
(3)

Проанализируем основные ситуации, определяющие характер вытеснения:

а) Плотности жидкостей равны ( $\Delta \varphi = 0$ ). Тогда, если подвижность вытесняющей жидкости  $C_2$  больше подвижности вытесняемой  $C_1$  (такое соотношение подвижностей называют неблагоприятным), граница раздела неустойчива, что приводит к образованию языков вытесняющей жидкости.

б) Подвижности жидкостей равны ( $C_1 = C_2$ ). Если плотность вытесняемой жидкости больше плотности вытесняющей и вытеснение происходит снизу вверх, то граница раздела неустойчива. Противоположная ситуация очевидна.

в) Жидкости обладают неблагоприятным соотношением подвижностей, но благоприятным соотношением плотностей  $C_1 > C_2$ ,  $\Delta \varphi \cdot \sin \alpha > 0$ , либо наоборот  $C_1 < C_2$ ,  $\Delta \varphi \cdot \sin \alpha < 0$ .

В зависимости от величины скорости фильтрации, которую считаем положительной, если она ориентирована вдоль оси  $\chi$ , знак  $\omega$  может меняться. Скорость, при которой  $\omega = 0$ , называется критической

$$W_{kp} = \frac{\Delta \varphi \cdot g \cdot \sin \alpha}{\lambda (C_1^{-1} + C_2^{-1})}.$$
(4)

При  $W > W_{kp}$  вытеснение неустойчиво, если  $W < W_{kp}$   
- устойчиво.

г) Жидкости "разноцветны" ( $C_1 = C_2, \Delta \varphi \sin \alpha = 0$ ). В этом случае  $\omega = 0$  и граница обладает нейтральной устойчивостью: возмущенная в некоторый момент, она со временем не деформируется.

Описанные выше результаты получены в рамках линейной теории, которая позволяет получить критерий устойчивости границы раздела и проследить ее начальную эволюцию. Но для описания дальнейшего развития возмущений линейная теория оказывается недостаточной.

Принято различать следующие три стадии неустойчивости (см., например, [II]): (1) стадия возмущения - амплитуда возмущения описывается линейной теорией; (2) стадия перехода - синусоидальная форма начального возмущения искается, амплитуда растет медленнее, чем предсказывает линейная теория; (3) регулярная асимптотическая стадия - развивается (без изменения формы) новое равновесное движение.

Теоретическое исследование развития неустойчивости на всех трех стадиях наталкивается на серьезные математические трудности, поэтому прежде отметим наиболее известные результаты лабораторного изучения характера продвижения водо-нефтяного контакта для условий несмешивающегося вытеснения ([3, 5, 8-10, 12-15]). В [3] характерные особенности разрастания языков изучались на щелевой модели, когда вытесняющим агентом был воздух. Установлено, что языки стремятся принять такое положение, при котором ширина колонок вытесняемой жидкости и воздуха примерно одинакова, т.е. относительная ширина языка равнялась примерно 0,5; языки двигались с постоянной скоростью, не меняя своей ширины.

Техника лабораторного моделирования и результаты экспериментальных исследований характера продвижения водонефтяного контакта на физических моделях пласта и жидкостей излагаются в [13-15], где, помимо подтверждения факта существования критической скорости вытеснения, выше которой процесс неустойчив, установлено наличие нижнего предела устойчивости, показана роль капиллярных и вязкостных сил в диапазоне устойчивости и за его пределами.

Математическое моделирование процессов развития неустойчивости связано не только с изучением начальной стадии развития неустойчивости, но и исследованием регулярной асимптотической

стадии. При этом следует напомнить, что с математической точки зрения неустойчивость типа Тейлора и Геймольца тесно связана с некорректностью в смысле Адамара, на что обращали внимание Курант Р. [16], Бабенко К.И. [17] и др. Можно отметить, что в упомянутой выше постановке задача об эволюции границы раздела сводится к задаче Коши для уравнения Лапласа. Несмотря на корректность задачи, предпринимались попытки ее аналитического решения для асимптотической стадии развития языка [3, 8, 18]. Как и следовало ожидать, решение оказалось не единственным. Оно зависит от двух параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , характеризующих положение языка относительно непроницаемых границ. Выбор конкретных значений этих параметров из физических соображений оказался невозможным. Напомним, что в экспериментах язык располагался симметрично относительно непроницаемых границ и имел ширину, равную примерно половине ширины щелевой модели. Нам представляется, что физически реализуемое решение можно получить, если учесть поверхностное натяжение на границе раздела. Однако аналитическое решение соответствующей системы наталкивается на непреодолимые трудности. Добавим только, что учет поверхностного натяжения равносителен с математической точки зрения, введению некоторого "регулятора", позволяющего выделить единственное решение, близкое к наблюдаемому в экспериментах.

Приближенное решение задачи об устойчивости границы раздела двух жидкостей методами теории возмущений с учетом нелинейных членов для малых получено в [19, 20]. В [19] получено решение с точностью до пятого порядка по амплитуде

$$\psi(x, t) = \alpha \psi_1 + \alpha^2 \psi_2 + \alpha^3 \psi_3 + \alpha^4 \psi_4,$$

где  $\psi_i$  - решение, даваемое линейной теорией. Показано, что если поверхностное натяжение пренебрежимо, приближения второго и третьего порядка не меняют симметричное развитие возмущений, предсказываемых линейной теорией; учет членов четвертого порядка вносит вторую гармонику, которая приводит к ассимметрии формы фронта. Необходимо отметить, что в [19] принято допущение о возможности расщепления условия для давления на границе раздела на два условия, каждое из которых содержит характеристики только одной из областей. Подход, реализованный в [20], свободен от указанного допущения. С помощью решения интегро-дифференциаль-

ного уравнения движения границы раздела, предложенного Даниловым В.Л., перемещение границы в начальный период найдено с точностью до седьмого порядка по амплитуде.

До сих пор обсуждались результаты, полученные для условий, когда поверхностное натяжение на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей не учитывались. Роль поверхностных сил при фильтрации в пористых средах велика, однако их учет при математическом моделировании является непростой задачей. Очевидно, что детальное описание процесса вытеснения на микроуровне невозможно, ибо оно потребовало бы решения уравнений Навье-Стокса с учетом капиллярных сил во внутриворовом пространстве, геометрия которого чрезвычайно сложна и многообразна.

Отметим основные работы, в которых предприняты попытки учета влияния капиллярных сил на устойчивость вытеснения.

Одной из первых работ, посвященных этому вопросу, является [10], где наряду с представленными результатами экспериментального и теоретического изучения устойчивости исследуется влияние капиллярных сил на движение границы раздела. Предложенный в работе упрощенный способ учета капиллярных сил носит несколько формальный характер и имеет определенный физический смысл лишь при описании процесса поршневого вытеснения из щелевой модели, т.к. действие капиллярных сил учитывается только за счет искривления границы раздела по формуле Лапласа. В то же время в реальной пористой среде влияние капиллярных сил на устойчивость вытеснения значительно больше, чем в щелевой модели ([13, 15, 21-23]). Авторы [10] по аналогии со щелевой моделью предлагают учитывать капиллярные эффекты на границе раздела двух жидкостей в пористой среде через эффективное поверхностное натяжение  $\sigma^*$  и радиус кривизны осредненной поверхности раздела, на которой слажены отдельные внутрипоровые мениски. При таком подходе методы теории возмущений позволяют найти критическую частоту возмущений

$$\omega_{kp} = \left[ \frac{\sigma^*}{(C_1^{-1} + C_2^{-1}) \cdot (W - W_{kp})} \right]^{\frac{1}{2}},$$

где  $W_{kp}$  определяется из (4). Вытеснение неустойчиво, когда  $W > W_{kp}$  и частота синусоидального возмущения меньше  $\omega_{kp}$ . Если  $\omega > \omega_{kp}$  вытеснение устойчиво и при  $W > W_{kp}$ . К сожалению, определение  $\sigma^*$  оказывается затруднительным и эффективное

поверхностное натяжение, подобранное авторами для количественного согласия с экспериментом, превышает истинное примерно в 40 раз.

Дальнейшее развитие задача изучения влияния капиллярных сил на устойчивость несмешивающего вытеснения получила в [ 23-27 ]. Подход, реализованный в [ 24 ], также связан с введением эффективного поверхностного натяжения и представляется в большой степени искусственным. В [ 25-26 ] изучается устойчивость так называемой стабилизированной зоны – узкой зоны, в которой происходит изменение насыщенности. По обе стороны от стабилизированной зоны насыщенность полагалась постоянной, гравитационные силы не учитывались, рассматривались синусоидальные возмущения с длиной волны намного большей, чем ширина переходной зоны. Полученный в [ 25, 26 ] критерий устойчивости показывает большее влияние скорости вытеснения на критическую длину волны возмущения в пористой среде, чем в щелевой модели согласно [ 10 ]. Исследование устойчивости стабилизированной зоны с помощью метода зональной линеаризации посвящена работа [ 27 ], где, в частности, указан способ анализа устойчивости для конкретных физических параметров среды и потока.

Завершая обсуждение основных результатов аналитического и экспериментального исследования устойчивости границы раздела двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде остановимся на работах, в которых развиваются теоретические методы описания двухфазного течения после потери устойчивости [ 3, 28-32 ]. Как указано выше, в [ 3 ] исследуется асимптотическая форма отдельного языка. Для математических моделей фильтрации после потери устойчивости, рассматриваемых в [ 28-32 ], характерно предположение, что в плоском течении имеются языки, протяженность которых намного больше их ширины. Гидродинамическая модель процесса строится, осредняя течение по сечению, содержащему большое количество языков, и, полагая осредненное движение одномерным. Задача сводится к нахождению из квазилинейного уравнения первого порядка доли сечения, занятого вытесняющей фазой.

Говоря выше о математических методах описания фильтрационной неустойчивости мы подчеркивали, что с их помощью можно достаточно строго исследовать, как правило, лишь начальную стадию развития неустойчивости, причем в рамках относительно простых

моделей фильтрации, когда насыщенность кусочно-постоянна и меняется либо скачком на границе раздела, либо непрерывно внутри относительно узкой стабилизированной зоны. Поэтому в последнее время большое внимание уделяется численному моделированию, которое позволило достичь существенного продвижения при решении некоторых проблем современной физики, в том числе проблемы гидродинамической неустойчивости. В этой связи следует упомянуть работы К.И.Бабенко, Б.Л.Рождественского и их сотрудников (см., например, [ 17, 33 ]). Численное моделирование неустойчивых течений – новое направление вычислительной гидродинамики, успешное развитие которого стало возможным в результате совершенствования вычислительной техники и разработки новых эффективных численных методов.

Применительно к задачам неустойчивого вытеснения в пористой среде численное моделирование позволяет изучать развитие неустойчивости на всех трех стадиях, а также исследовать более общие модели процесса вытеснения. К числу работ, в которых устойчивость процесса фильтрации двух несмешивающихся жидкостей исследуется численно, следует отнести [ 34-37 ]. В [ 34 ], используя конечно-разностные методы, получены результаты, дополняющие известные исследования фронтальной неустойчивости путем учета переходной зоны в профиле насыщенности за фронтом. Дальнейшее развитие исследований этого и ряда других вопросов имеется в [ 35-37 ], где большое внимание уделяется изучению особенностей применения методов сквозного расчета разрывных решений соответствующей краевой задачи. Особое значение придается вопросу достоверности воспроизведения численными методами закономерностей неустойчивых фильтрационных течений, изучению влияния аппроксимационной вязкости разностных схем. Эффективность использования предложенных методик численного моделирования иллюстрируется путем сравнения с известными аналитическими и экспериментальными данными. В [ 35, 36 ] получено удовлетворительное совпадение с решением задачи о движении языка жидкости в щелевой модели. Анализ численных решений позволил выявить ряд закономерностей распределения фаз в процессе активного языкообразования. Исследование особенностей процесса неустойчивого вытеснения на всех стадиях выполнено в [ 37 ]. Численное моделирование позволяет установить границы применимости линейной теории, описывающей начальную стадию языкообразования, исследовать особенности процесса в

переходной и регулярной асимптотической стадиях.

Выше обсуждались результаты исследования гидродинамической устойчивости фильтрационных потоков в условиях изотермического течения двух несмешивающихся жидкостей. Однако известен ряд других, более сложных моделей фильтрации. Поэтому в заключение назовем основные направления исследований гидродинамической устойчивости фильтрационных потоков и приведем соответствующие библиографические ссылки:

- лабораторные исследования устойчивости процессов изотермического несмешивающегося вытеснения одной жидкости другой [ 3,5,8-15,21-22,31 ] ;
- лабораторные исследования устойчивости процессов изотермического смешивающегося вытеснения [ 4I-46 ] ;
- лабораторные исследования влияния на гидродинамическую устойчивость процесса вытеснения капиллярных и гравитационных эффектов, неоднородности, слоистости и трещиноватости пласта [ 5,10,I3,I5,21,22,3I,38,4I ] ;
- теоретические исследования устойчивости границы раздела несмешивающихся жидкостей в тонких горизонтальных и наклонных пластах, когда движение фаз описывается линейным [ 3-10,18-20 ], [ 23,24,26-28,38-40,47-53 ] или нелинейным [ 54-56 ] законами фильтрации;
- теоретические исследования устойчивости границы раздела в мощных пластах [ 57,58 ] ;
- теоретические, включая численные, исследования устойчивости процесса несмешивающегося вытеснения с учетом переходной зоны за скачком насыщенности [ 34-37,56 ] и капиллярных сил в окрестности фронта [ 10,19,23-26,53 ] ;
- теоретические исследования устойчивости несмешивающегося вытеснения в неизотермических условиях [ 59,60 ] ;
- теоретические исследования устойчивости смешивающегося вытеснения [ 27,29,35,36,43,53,6I-67 ] ;
- разработка и изучение гидродинамических моделей процессов вытеснения в пористой среде после потери устойчивости [ 29-3I ] ;
- исследование интегральных характеристик фильтрационных потоков в системах скважин в условиях неустойчивого вытеснения [ 5,8,37,43,52,6267,68-70 ] .

- I. Helmholtz H. -Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1869, Juli, 761-780.
2. Taylor G.I. -Proc. Roy. Soc., 1950, vol.A-201, 192.
3. Saffman P.G., Taylor G.I. - Proc. Roy. Soc., 1958, vol.A-245, No.1242, 312-329.
4. Пилатовский В.П. Нефтяное хозяйство, 1951, № 4, 13-18.
5. Van Meurs P. - Trans. AIME, 1957, vol.210, 295-300.
6. Пилатовский В.П. Украинский математический журнал, 1958, т. X, № 2, 160-177.
7. Пилатовский В.П. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № II, 43-49.
8. Taylor G.I., Saffman P.J. - Quarterly Jour. of Mech. and Appl. Math., 1959, vol.XII, Aug., part 3, 265-279.
9. Van Meurs P., van der Poel C. - Trans. AIME, 1958, vol.213, 103-112.
10. Chouke R.L., van Meurs P., van der Poel C. - Trans. AIME, 1959, vol.216, 188-194.
- II. Биркоф Г. Сб. "Гидродинамическая неустойчивость", М., "Мир", 1964, 68-94.
12. Lewis D.J. - Proc. Roy. Soc., 1950, vol.A-202, 81-95.
13. Кисиленко Б.Е. ПМТФ, 1961, № 6, 194-195.
14. Кисиленко Б.Е. Научно-технический сб. по добыче нефти, 1963, вып. 20, 24-28.
15. Кисиленко Б.Е. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 6, 80-84.
16. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., "Мир", 1964.
17. Бабенко К.И., Петрович В.Ю. О неустойчивости Рэлея-Тейлора. Препринт ИПМ АН СССР, № 68, М., 1978.
18. Тейлор Дж.И. Сб."Проблемы механики сплошной среды. К 70-летию акад. Н.И.Мусхелишвили". М., АН СССР, 1961, 428-438.
19. Outmans H.D. - SPEJ, 1962, vol.2, No.2, 165-176.
20. Данилов В.Л., Кац Р.М. Труды Всесоюзной конференции по математическим методам решения задач подземной нефтяной гидродинамики. Баку, "ЭЛМ", 1974, 178-190.
21. Оганджанянц В.Г., Егорова И.И. Докл. АН СССР, 1960, т.134 № 1, 59-61
22. Croissant R. - Revue IFP, 1970, vol.25, 227.

23. Hagoort J. - SPEJ, 1974, vol.14, No.2, 63-74.
24. Pottier J., Jacquard P. - Revue IFP, 1963, No.4, 527-540.
25. Рыжик В.М., Кисиленко Б.Е. Сб. "Физико-геологические факторы при разработке нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений", М., "Недра", 1969, 82-92.
26. Баренблatt Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., "Недра", 1972.
27. Кац Р.М. - Докл. АН СССР, 1973, т.2II, № 2, 304-307.
28. Чарный И.А. Подземная гидродинамика. М., "Гостоптехиздат", 1963.
29. Perrine R.L. - SPEJ, 1963, vol.3, No.2, 205-213.
30. Рыжик В.М., Бернадинер М.Г., Кестенбойм Х.С. Сб. "Теоретические и экспериментальные проблемы рациональной разработки нефтяных месторождений". Казань, 1972, ч.2, 93-95.
31. Бернадинер М.Г., Ентов В.М., Уголова А.В. Докл. АН СССР, 1979, т.245, № 2, 320-324.
32. Желтов Ю.В., Рыжик В.М., Кисиленко Б.Е., Аванесов И.Г. Геология нефти и газа. 1970, № 3, 30-35.
33. Рождественский Б.Л., Левитан Ю.Л., Моисеенко Б.Д. О методах численного моделирования турбулентных течений несжимаемой вязкой жидкости. Препринт ИПМ АН СССР, № I4, М., 1979.
34. Rachford H.H. - SPEJ, 1964, vol.4, No.2, 133-148.
35. Индельман П.В., Кац Р.М., Швидлер М.И. Сб."Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости", Новосибирск, 1977, 97-II4.
36. Индельман П.В., Кац Р.М., Швидлер М.И. Изв.АН СССР, МЖГ, 1979, № 2, 20-27.
37. Ентов В.М., Таранчук В.Б. - Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 5, 58-63.
38. Hawthorne R.G. - Trans. AIME, 1960, vol.219, 81-87.
39. Scheidegger A.E. - The Physics of Fluids, 1960, vol.3, No.1, 84-104.
40. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М., "Мир", 1964.
41. Blackwell R.J., Rayne J.R., Terry W.M. - Trans AIME, 1959, vol.216, 1-8.
42. Slobod R.L., Thomas R.A. - SPEJ, 1963, vol.3, No.1, 9-13.
43. Koval E.J. - SPEJ, 1963, vol.3, No.2, 145-154.
44. Benham A.L., Olson R.W. - SPEJ, 1963, vol.3, No.2, 138-144.
45. Dumore J.M. - Trans. AIME, 1964, vol.231.
46. Kyle C.R., Perrine R.L. - SPEJ, 1965, vol.5, No.3, 189-195.
47. Wooding R.A. - Jour. Fluid Mech., 1960, vol.7, p.4, 501-515.
48. Пилатовский В.П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М., "Недра", 1966.
49. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). М., "Наука", 1969.
50. Wooding R.A. - Jour. Fluid Mech., 1969, vol.39, p.3, 477-495
51. Пилатовский В.П. Научно-технический сб. по добыче нефти. 1969, вып.35, 37-42.
52. Пилатовский В.П. Научно-технический сб. по добыче нефти. 1974, вып.60, 73-90.
53. Данилов В.Л., Кац Р.М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде. М., "Недра", 1980.
54. Бернадинер М.Г., Ентов В.М. Сб."Тепло- и массоперенос", Минск, 1968, т.3, 293-304.
55. Рубежанский В.М. Сб."Исследования по механике сплошных сред", Воронеж, 1974, вып.4, 30-34.
56. Бернадинер М.Г., Ентов В.М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М., "Наука", 1975.
57. Dietz D.N. - Proc. Kon. Akad. Wetensch., 1953, vol.B56, 83.
58. Outmans H.D. - SPEJ, 1962, vol.2, No.2, 156-164.
59. Miller C.A. - A.I.Ch.E. Jour., 1975, vol.21, 474-479.
60. Armento M.E., Miller C.A. -SPEJ, 1977, vol.17, No.4, 423-430.
61. Perrine R.L. - SPEJ, 1961, vol.1, 9-16, No.1.
62. Perrine R.L. - SPEJ, 1961, vol.1, No.1, 17-25.
63. Peaceman D.W., Rachford H.H. - SPEJ, 1962, vol.2, No.4, 327-339.
64. Dougherty E.L. - SPEJ, 1963, vol.3, No.2, 155-163.
65. Dumore J.M. - Trans. AIME, 1964, vol.231, 356-362.
66. Perrine R.L., Gray G.M. -SPEJ, 1966, vol.6, No.2, 228-238.
67. Settary A., Price H.C., Dupont T.-SPEJ, 1977, v.17, N2, 228-246.
68. Haberman B. - Trans. AIME, 1960, vol.219, 264-272.
69. Коган Л.Г. Научно-технический сб. по добыче нефти. 1965, вып.26, 20-24.
70. Cleridge E.L. - SPEJ, 1972, vol.12, No.2, 143-155.