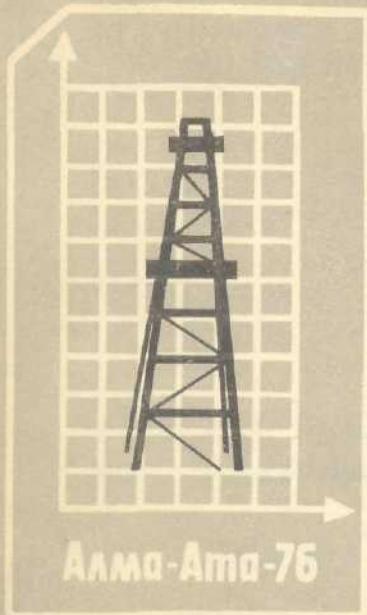


Паранжук



*Ч*ИСЛЕННОЕ
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ФИЛЬТРАЦИИ
МНОГОФАЗНОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ
ЖИДКОСТИ

Приложение

Академия наук СССР Сибирское отделение
Вычислительный центр

Б.К. +

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ
МНОГОФАЗНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Труды Ш Всесоюзного семинара

Сборник научных трудов

Под редакцией А.Н.Коновалова



Новосибирск 1977

1:10
2:11
3:11
4:12
5:10
6:9
7:10
8:1

ТБ6-06.80

Ю.П.Крупнов, А.Н.Сичёв, В.Б.Таранчук

О ПРИМЕНЕНИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ БАКЛЕЯ-ЛЕВЕРЕТТА

Предлагается семейство трехслойных разностных схем, аппроксимирующих смешанную задачу Коши применительно к уравнению в частных производных первого порядка. Исследуется вопрос о применимости предложенных схем для решения задачи Баклея-Леверетта, результаты расчетов в одномерном случае сравниваются с точным решением, полученным методом характеристик, и с расчетами по другим известным разностным схемам.

Для численного решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

($F_u(u) \geq 0$) в области $\Omega = \{0 \leq x \leq \infty, 0 \leq t \leq T\}$ со следующими начальными и граничными условиями:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u^0 \quad (3)$$

на сетке $\omega_{th} = \{t^n = nh, n = 0, 1, 2, \dots, N = [\frac{T}{h}], x_j = j \cdot h, j = 0, 1, 2, \dots\}$ предлагается следующее семейство трехслойных разностных схем:

$$U_i^{k+1} - U_i^{k-1} = \frac{h}{h} [F(A_{(b)} U_i^k) - F(B_{(b)} U_i^k)], \quad (4)$$

где

$$A_{(b)} U_i^k = (b + \frac{1}{2}) U_{i-1}^k + (1 - 2b) U_i^k + (b - \frac{1}{2}) U_{i+1}^k,$$

$$B_{(b)} U_i^k = (b - \frac{1}{2}) U_{i-1}^k + (1 - 2b) U_i^k + (b + \frac{1}{2}) U_{i+1}^k,$$

b – параметр, $k = 1, 2, \dots, N - 1$, $i = 1, 2, \dots, U_i^1$ ($i = 1, 2, \dots$) определяются по схеме "явный уголок":

$$U_i^1 = U_i^0 + \frac{h}{h} (F(U_{i-1}^0) - F(U_i^0)).$$

Условия (2), (3) записываются в виде:

$$U_i^0 = u_0(x_i), \quad (5)$$

$$U_0^{k+1} = u^0. \quad (6)$$

Предполагая, что решение u и функция $F(u)$ являются достаточно гладкими, и, производя соответствующие разложения, не трудно показать, что разностная схема (4)–(6) аппроксимирует задачу (1)–(3) со вторым порядком.

Исследуем сходимость решения, полученного по схеме (3)–(6). Для погрешности решения $v = u - U$, после несложных преобразований получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} v_i^{k+1} - v_i^{k-1} &= -2 \cdot g \cdot \frac{\partial F(U_i^k)}{\partial u} \Delta_0 v_i^k + R_1 h^3 + \\ &+ R_2 h (A_{(b)} v_i^k) + R_3 h (B_{(b)} v_i^k) + \\ &+ R_4 (A_{(b)} v_i^k)^2 + R_5 (B_{(b)} v_i^k)^2 + O(h^5), \end{aligned} \quad (7)$$

$$v_i^1 = R_0 h^2, \quad v_i^0 = 0,$$

$$v_0^{k+1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1,$$

где

$$\Delta_0 v_i^k = \frac{1}{2} (v_{i+1}^k - v_{i-1}^k), \quad g = \frac{h}{h},$$

$R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ – ограниченные величины, не зависящие от h . Умножая уравнения (7) на $h(v_i^{k+1} + v_i^{k-1})$ и суммируя по $i = 1, 2, \dots$, для

$$s_k = \|v^{k+1}\|^2 + \|v^k\|^2 + 2g \cdot (v_i^{k+1}, \frac{\partial F(U_i^k)}{\partial u} \Delta_0 v_i^k)$$

после применения формулы суммирования по частям и неравенства Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} s_k - s_{k-1} &\leq \bar{b} h (\|v^{k+1}\|^2 + \|v^k\|^2) + \bar{b} h \cdot (\|v^k\|^2 + \\ &+ \|v^{k-1}\|^2) + 9 c a_2 h^{-1/2} \|v^k\| \cdot (\|v^{k+1}\|^2 + \\ &+ \|v^{k-1}\|^2) + 18 c a_2 h^{-1/2} \|v^k\|^3 + a_1 h^5, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\bar{b} = \frac{1}{2} a_1 + 3a_2 c + a_2 (g^2 + 2g),$$

$$a_1 = \frac{2}{3!} g e e_3 + \frac{1}{2} g e (4c e_1 e_2 + 2h c^2 e_2^2) + \frac{16}{3!} g e c^3 e_1^3 + \frac{2}{3!} g^3 e_3,$$

$$a_2 = \max\{2gce_1e, \frac{1}{2} ge, ce_1\}, \quad e_1 = \max\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\right\},$$

$$c = \max\{|b - \frac{1}{2}|, |b + \frac{1}{2}|, |1 - 2b|\}, \quad e = \max\{|F_u|, |F_{u^2}|\},$$

$$|F_{u^3}|,$$

$$e_2 = \max_{\Omega} \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| \right\}, \quad e_3 = \max_{\Omega} \left\{ \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|, \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right| \right\}.$$

Так как при $\max_{k,j} |g \frac{\partial F(u^k)}{\partial u}| \leq 1$ имеет место неравенство

$$\|v^{k+1}\|^2 + \|v^k\|^2 \leq L s_k, \quad L > 0, \quad L = \text{const} \quad (9)$$

из (8) следует, что

$$s_k \leq s_{k-1} + \alpha (h \cdot s_{k-1} + h s_k + h^{-1/2} s_k \cdot s_{k-1}^{1/2} + h^{-1/2} s_{k-1}^{3/2} + h^5), \quad (10)$$

где $\alpha = \max\{\bar{b}L, a_1, 27c a_2 L^{3/2}\}$. Начальные данные для (10) имеют следующий вид:

$$s_0 \leq mh^4, \quad m = (\frac{1}{2} g^2 e_2 + \frac{1}{2} gee_1^2 + \frac{1}{2} gee_2 + \frac{1}{2} e_2)^2.$$

При h , удовлетворяющем неравенствам

$$\begin{aligned} ah &< \frac{1}{2} \\ (m + \alpha_1 T e^{-1}) \cdot h &\leq 1, \end{aligned}$$

для $s_k (k = 1, 2, \dots, N)$ получаем следующую оценку:

$$s_k \leq (m + \alpha_1 T e^{-1}) \cdot h^4, \quad (11)$$

где

$$\alpha_1 = \alpha \cdot [g(1 - 2\alpha h)]^{-1}.$$

Из (II), учитывая (9), имеем

$$\|v^k\| \leq (Lm + \alpha_1 L T e^{-1})^{1/2} h^2.$$

Следовательно, решение, получаемое по разностным схемам (4)-(6), при выполнении условия $\max_{h \in \Omega} |F'(u)| \leq 1$ сходится в L_2 -норме к решению исходной задачи (I)-(3) со скоростью h^2 .

Разностные схемы (4) применялись для решения одномерной задачи Баклея-Леверетта:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + q \frac{\partial F(s)}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

($q = \text{const}$, s – насыщенность вытесняющей фазы, F – функция Леверетта) с начальными и граничными данными

$$s(0, x) = s_0, \quad (13)$$

$$s(t, 0) = s^0, \quad (14)$$

которая является модельной для описания двухфазной фильтрации несмешивающихся нескимаемых жидкостей без учета капиллярных и гравитационных сил.

Как известно, особенностью решения задачи (12)-(14) является наличие разрывов в распределении насыщенности, а также то, что наряду с известным разрывным решением Баклея-Леверетта можно построить и другие разрывные решения, которые в отличие от первого будут неустойчивыми. Из-за наличия указанных особенностей большинство известных разностных схем при расчете решений задачи (12)-(14) дают неудовлетворительные результаты (см. [I-7]). При расчетах задачи (12)-(14) в правую часть (4) добавляется регуляризатор $\lambda \cdot R(U_i^{k-1})$, который выбирался двумя способами:

$$R(U_i^{k-1}) = U_{i-1}^{k-1} - 2 \cdot U_i^{k-1} + U_{i+1}^{k-1}, \quad (15)$$

$$R(U_i^{k-1}) = F(U_{i-1}^{k-1}) - 2F(U_i^{k-1}) + F(U_{i+1}^{k-1}), \quad (16)$$

(λ – постоянная порядка h). Численный расчет решения краевой задачи (12)-(14) проводился для случая

$$F(s) = \frac{\mu_0 f_2(s)}{f_1(s) + \mu_0 f_2(s)}, \quad f_2(s) = (1-s)^2,$$

$$f_1(s) = s^2, \quad \mu_0 = 10, \quad q = 3, \quad s_0 = 0, \quad s^0 = 1.$$

Некоторые результаты расчетов представлены на рисунках I-4: расчеты выполнялись при $h = 0,05$, $\tau = 0,0025$, за исключени-

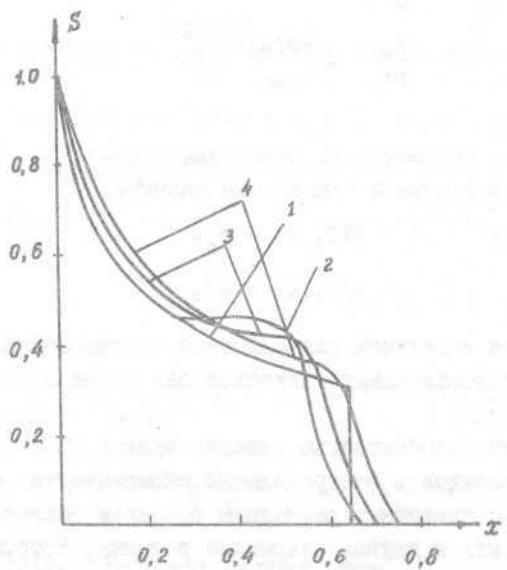


Рис.1.

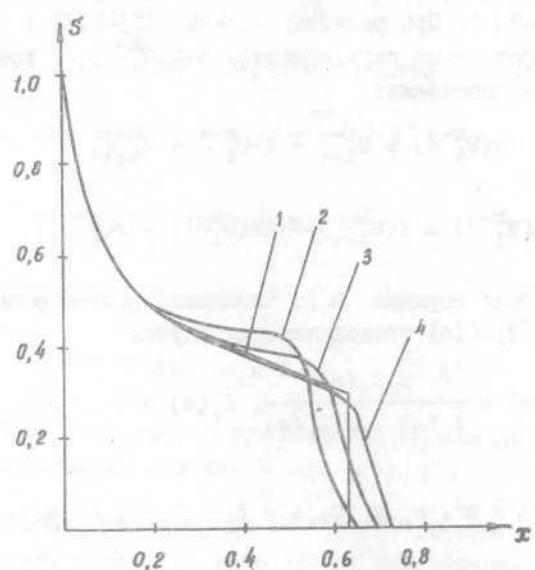


Рис.2.
126

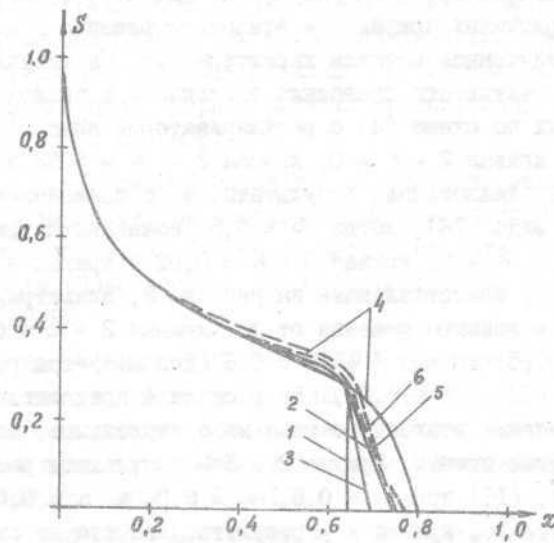


Рис.3.

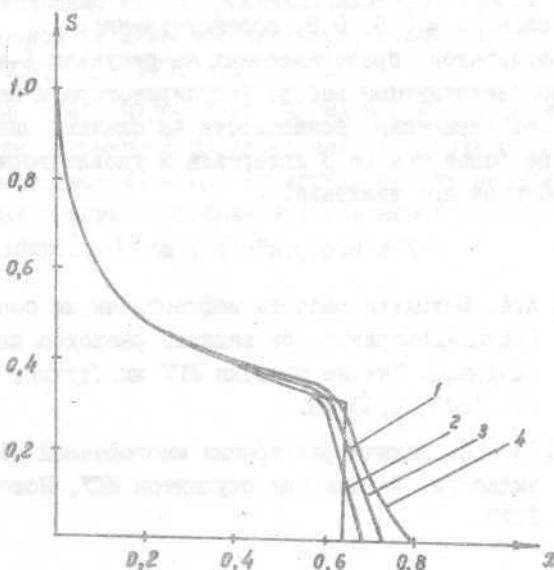


Рис.4.
127

ем случая - кривая 3 на рисунке 4, где $h = 0,025$, $\tau = 0,00125$; на всех рисунках кривая I - эталонное решение в момент $t = 0,1$, полученное методом характеристик. На рисунке I представлены результаты сравнения эталонного и численных решений, полученных по схеме (4) с регуляризатором вида (15), когда $b = 0,5$: кривая 2 - $\lambda = 0$, кривая 3 - $\lambda = 0,03$ и кривая 4 - $\lambda = 0,1$. Аналогичные результаты, но с применением регуляризатора вида (16), когда $b = 0,5$, показаны на рисунке 2: кривая 2 - $\lambda = 0$, кривая 3 - $\lambda = 0,02$ и кривая 4 - $\lambda = 0,05$. Результаты, представленные на рисунке 3, иллюстрируют зависимость численного решения от b : кривая 2 - $b = 0,4$, кривая 3 - $b = 0,5$, кривая 4 - $b = 0,6$ (используется регуляризатор вида (16), $\lambda = 0,05$). На рисунке 4 представлены результаты сравнения эталонного решения с численными, полученными по различным схемам. Кривые 2 и 3 - результаты расчета по схеме (4), (16) при $b = 0,5$, $\lambda = 0,05$ и $h = 0,05$ и $0,025$, соответственно, кривая 4 - результат расчета по схеме "явный уголок" при $h = 0,05$, $\tau = 0,0025$ и кривые 5,6 - результат расчета по схеме "чехарда" с "повышением" промежуточного слоя (см. [7]), когда $h = 0,05$, $\tau = 0,0025$ и параметр "повышения" слоя $\kappa = 0,8, 0,9$, соответственно.

Из результатов, представленных на рисунках I-4, следует, что при соответствующем выборе регуляризатора и параметра схемы b нет завышения насыщенности на скачке, скачок размазывается не более чем на 3 интервала и удовлетворительно воспроизводится его движение.

Л и т е р а т у р а

1. БУЙКИС А.А. Методика расчета нефтеотдачи на основе теории Баклея-Леверетта при задании расходов или забойных давлений. Ученые записки ЛГУ им. Струки, т. 123, Рига, 1970, с. 33-76.
2. КОНОВАЛОВ А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Лекции для студентов НГУ, Новосибирск, 1972.

3. ЧУДОВ Л.А., ЧУРМАЕВ О.М. О численном решении системы уравнений одномерной нестационарной фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. Всесоюзный Нефтегазовый НИИ, Сборник научных трудов, выпуск 49, М., 1974, с. 35-38.
4. ТАРАНЧУК В.Б. Численный метод для определения давления и насыщенности при плоско-радиальном вытеснении нефти водой. - Сб. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, т. 5, № 3, 1974, с. 88-95.
5. КОРОЛЕВ А.В., ШАЛИМОВ В.Б., ШВИДЕР М.И. О некоторых разностных схемах для численного решения задачи Баклея-Леверетта. - Сб. Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости, Новосибирск, 1975, с. 137-154.
6. ЛЕВИ Б.И., ЗАЙДЕЛЬ Я.М., ШАХМАЕВА А.Г., СУРКОВ Ю.В. О некоторых разностных схемах для решения задач двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей. - Сб. Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости, Новосибирск, СО АН СССР, ВЦ, 1975, с. 170-183.
7. МЫХТАРЯНЦ С.А., ЧУДОВ Л.А., ЧУРМАЕВ О.М. Численное решение одномерной плоско-линейной задачи о вытеснении нефти водой. - Сб. Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости, Новосибирск, СО АН СССР ВЦ, с. 242-249.