

где  $L$  - характерный размер области фильтрации,  $P_*$  - характерный перепад давления,  $K_*$  - характерная проницаемость среды. Принимая обозначения  $A = K(f_1 + \mu_1 \mu_2^{-1} f_2)$ ,  $F(s) = \mu_1 \mu_2^{-1} f_2 (f_1 + \mu_1 \mu_2^{-1} f_2)^{-1}$ ,  $q_x = A \frac{\partial P}{\partial X}$ ,  $q_y = A \frac{\partial P}{\partial Y}$ , из (I.1) получаем систему

$$\frac{\partial}{\partial X} (A \frac{\partial P}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial Y} (A \frac{\partial P}{\partial Y}) = 0, \quad (I.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = q_x \frac{\partial F}{\partial X} + q_y \frac{\partial F}{\partial Y}. \quad (I.4)$$

Пусть  $(x, y) \in \mathcal{B}$ , где  $\mathcal{B}$  - многосвязная область, ограниченная замкнутым несамопресекающимся контуром  $\Gamma$  и контурами скважин. В области  $\mathcal{B}$  применительно к системе (I.3)-(I.4) рассматривается следующая краевая задача: на контурах скважин для давления задаются граничные условия первого или второго рода, что соответствует заданию напора или дебита; эти же условия задаются на различных участках, из которых состоит контур  $\Gamma$ ; на контурах нагнетательных скважин и на части внешнего контура, где вытесняющая жидкость втекает в область  $\mathcal{B}$ , задается насыщенность вытесняющей фазы.

В начальный момент  $t=0$  в области  $\mathcal{B}$  задается распределение насыщенности.

## 2. Разностная схема для уравнений нестационарной двухфазной фильтрации

Рассмотрим разностную аппроксимацию поставленной задачи. При этом для простоты изложения предположим, что в области фильтрации имеется только одна скважина, центр которой находится в начале координат.

В области, ограниченной контуром  $\Gamma$ , введем равномерную сетку с шагом  $h$ ; значения функций  $P$ ,  $S$  и  $A$  в узлах  $(ih, jh)$  на временном слое с номером  $n$  (слой  $t^n$ ) будем обозначать  $P_{i,j}^n$ ,  $S_{i,j}^n$  и  $A_{i,j}^n$ , соответственно.

Радиус скважины  $r_0$  много меньше характерного размера области  $\mathcal{B}$ , поэтому нецелесообразно строить сетку так, чтобы учесть размеры и форму скважины, ибо иначе число узлов сетки было бы чрезвычайно большим [I,2]. Таким образом, построенная сетка не будет аппроксимировать внутреннюю границу и возникают трудности аппроксимации граничных условий на скважине.

В.Б. ТАРАНЧУК, Л.А. ЧУДОВ

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ОБЛАСТИ СО СКВАЖИНАМИ

### I. Постановка задачи. Границные и начальные условия

Рассматривается нестационарная изотермическая фильтрация двух несмешивающихся нескимиаемых жидкостей в недеформируемой пористой среде. Предполагается, что пласт является горизонтальным и ограничен внешним контуром и контурами скважин - окружностями радиуса  $R_0$ .

Пренебрегая капиллярными эффектами, для определения фазового давления  $P$  и насыщенности вытесняющей фазы  $S$  имеем систему

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial (1-S)}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{K_f}{\mu_1} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{K_f}{\mu_1} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) \\ m \frac{\partial S}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{K_f}{\mu_2} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{K_f}{\mu_2} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (I.1)$$

где  $m$  - пористость,  $K(XY)$  - абсолютная проницаемость среды,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  - вязкости вытесняемой и вытесняющей фаз, соответственно,  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  - относительные фазовые проницаемости,  $X, Y$  - декартовы координаты в плоскости фильтрации,  $T$  - время,  $0 \leq T \leq T_f$ .

Введем безразмерные переменные

$$t = \frac{T P_* K_*}{m L^2 \mu_1}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L}, \quad (I.2)$$

$$G = \frac{R_0}{L}, \quad P = \frac{P}{P_*}, \quad \kappa = \frac{K}{K_*},$$

Для преодоления этих трудностей предлагалось считать скважину точечной с заданием граничных условий в узле - скважине. Однако, такой метод не представляется вполне удовлетворительным из-за сильной зависимости численного решения от шага сетки  $h$  [1,2].

Рассмотрим другой способ преодолевания трудностей, связанных с аппроксимацией граничных условий на скважине. Пусть  $\mathcal{G}_h$  - окружность радиуса  $h$ , концентрическая с контуром скважины  $\Gamma$  - расстояние до центра скважины и  $\varphi$  - полярный угол, отсчитываемый от положительного направления оси  $x$ . Предположим что в области, ограниченной контурами  $\mathcal{G}_h$  и  $\Gamma$ , в любом секторе с малым углом раствора фильтрация является плоско-радиальной. Тогда переходя к переменной

$$u = \ln(r/r_0^{-1}) \ln^2(hr_0^{-1}) \quad (2.1)$$

[3] для определения  $\rho$  и  $s$  в окрестности  $r_0 \leq r \leq h$  имеем систему

$$\frac{\partial}{\partial u} (A_\alpha \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial u}) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial s_\alpha}{\partial t} = \frac{A_\alpha}{\ln^2(hr_0^{-1})r_0^2} \left(\frac{r_0}{h}\right)^{2u} \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial u} \frac{\partial f(s_\alpha)}{\partial u}, \quad (2.3)$$

где индекс  $\alpha$  означает, что функции рассматриваются на луче  $\varphi=\alpha$  при  $0 \leq u \leq 1$ . В области  $0 \leq u \leq 1$  введем равномерную по  $u$  сетку с узлами  $u_l = l \Delta u$ ,  $l=0, 1, \dots, m$ , где  $m$  - число узлов сетки и  $\Delta u = 1/m$ ; значения функций  $\rho_\alpha$ ,  $s_\alpha$  и  $A_\alpha$  в узлах  $u_l$  на временном слое  $t^n$  будем обозначать  $\rho_{\alpha l}^n$ ,  $s_{\alpha l}^n$  и  $A_{\alpha l}^n$ , соответственно.

Таким образом, в дальнейшем рассматривается задача нахождения функций  $\rho$  и  $s$ , удовлетворяющих на выделенных направлениях  $\varphi=\alpha$  в области  $r_0 \leq r \leq h$  системе (2.2)-(2.3), и - системе (I.3)-(I.4) в области, ограниченной внешним контуром  $\Gamma$  и контуром  $\mathcal{G}_h$ . На контуре  $\mathcal{G}_h$  задаются условия непрерывности  $\rho$ ,  $s$  и нормальной составляющей вектора  $\{q_x, q_y\}$ .

Для численного решения задачи применяется следующий алгоритм: а) по известному на  $n$ -ом шаге распределению  $s^n$  и граничным условиям для давления из уравнений (I.3) и (2.2) находим на  $(n+1)$ -ом шаге распределение  $\rho^{n+1}$ ; б) по найденно-

му распределению давления, краевым условиям для  $s$  и распределению  $s^n$  из уравнений (I.4) и (2.3) определяем распределение  $s^{n+1}$  и переходим к следующему шагу по времени [4].

Рассмотрим алгоритм расчета давления на  $(n+1)$ -ом шаге. При этом будем предполагать, что на внешней сеточной границе  $\Gamma_h$  аппроксимация граничных условий известна.

Уравнение (I.3) в сеточной области, ограниченной  $\Gamma_h$  и  $\mathcal{G}_h$  аппроксимируется по итерационной схеме [5]

$$\frac{\rho_{i,j}^{y+1/2} - \rho_{i,j}^y}{\tau} = \frac{1}{2h^2} \left[ A_{i+1/2,j}^R (\rho_{i+1,j}^{y+1/2} - \rho_{i,j}^{y+1/2}) - A_{i-1/2,j}^R (\rho_{i,j}^{y+1/2} - \rho_{i-1,j}^{y+1/2}) + A_{i,j+1/2}^R (\rho_{i,j+1}^y - \rho_{i,j}^y) - A_{i,j-1/2}^R (\rho_{i,j}^y - \rho_{i,j-1}^y) \right], \quad (2.4)$$

$$\frac{\rho_{i,j}^{y+1} - \rho_{i,j}^{y+1/2}}{\tau} = \frac{1}{2h^2} \left[ A_{i+1/2,j}^R (\rho_{i+1,j}^{y+1/2} - \rho_{i,j}^{y+1/2}) - A_{i-1/2,j}^R (\rho_{i,j}^{y+1/2} - \rho_{i-1,j}^{y+1/2}) + A_{i,j+1/2}^R (\rho_{i,j+1}^y - \rho_{i,j}^y) - A_{i,j-1/2}^R (\rho_{i,j}^y - \rho_{i,j-1}^y) \right], \quad (2.5)$$

где  $\tau$  - итерационный параметр,  $y$  - номер итерации ( $y=0, 1, 2, \dots$ ),  $\rho_{i,j}^{y+1/2}$  - промежуточные значения,  $A_{i+1/2,j}^R = 0.5(A_{i+1,j}^R + A_{i,j}^R)$ ,

$A_{i,j+1/2}^R = 0.5(A_{i,j+1}^R + A_{i,j}^R)$ ; при  $y=0$ ,  $\rho_{i,j}^y = \rho_{i,j}^n$ . Итерации считаются законченными, а значения  $\rho_{i,j}^{n+1}$  - определенными, как только выполняется условие

$$\max_{ij} |r_{i,j}^{y+1}| \leq \epsilon, \quad (2.6)$$

где

$$r_{i,j}^y = A_{i+1/2,j}^R (\rho_{i+1,j}^y - \rho_{i,j}^y) - A_{i-1/2,j}^R (\rho_{i,j}^y - \rho_{i-1,j}^y) + A_{i,j+1/2}^R (\rho_{i,j+1}^y - \rho_{i,j}^y) - A_{i,j-1/2}^R (\rho_{i,j}^y - \rho_{i,j-1}^y),$$

а  $\epsilon$  - малый параметр ( $\epsilon > 0$ ).

Уравнения (2.2) на лучах  $\varphi=\alpha$  аппроксимируются по схеме

$$A_{\alpha l+1/2}^R (\rho_{\alpha l+1}^{n+1} - \rho_{\alpha l}^n) - A_{\alpha l-1/2}^R (\rho_{\alpha l}^{n+1} - \rho_{\alpha l-1}^n) = 0, \quad (2.7)$$

где

$$A_{\alpha l+1/2}^R = 0.5(A_{\alpha l+1}^R + A_{\alpha l}^R).$$

Решение разностных уравнений (2.4)-(2.5) и (2.7) строится одновременно. Для разностных уравнений (2.7) при  $\alpha=\pi/2, \pi$

и  $\partial/\partial t$  вычисляются прогоночные коэффициенты по формулам правой прогонки [5].

Рассмотрим расчет значений  $\rho_{i,j}^{y+1/2}$ . Для всех  $j$ , отличных от  $-1, 0$  и  $1$ , разностные уравнения (2.4) при соответствующих граничных условиях в точках границы  $\Gamma_h$  при  $y=jh$  решаются методом прогонки. Пусть  $j=\pm 1$ . Условия на  $g_h$  в узлах  $(0, \pm h)$  аппроксимируются выражениями

$$\rho_{\alpha m}^{n+1} = \rho_{0, \pm 1}^{y+1/2}, \quad (2.8)$$

$$A_{\alpha m-1/2}^n \frac{\rho_{\alpha m}^{n+1} - \rho_{\alpha m-1}^{n+1}}{\Delta u \ln(h r_o^{-1})} = g A_{0, \pm 1, 0}^n (\rho_{0, \pm 2}^{y+1/2} - \rho_{0, \pm 1}^{y+1/2}),$$

где  $\alpha = \kappa/(1 \mp 1/2)$  и  $g$  – весовой параметр,  $1 < g < 2$ . Из (2.8), т.к. значения  $\rho_{0, \pm 2}^{y+1/2}$  и прогоночные коэффициенты для (2.7) при  $\alpha = \kappa/(1 \mp 1/2)$  определены, вычисляются значения  $\rho_{0, \pm 1}^{y+1/2}$ , после чего, решая уравнения (2.4) при  $j=\pm 1$ ,  $i \geq 1$  и  $i \leq -1$  методом прогонки, находим значения  $\rho_{i, \pm 1}^{y+1/2}$ .

Пусть  $j=0$ . Условия на  $g_h$  в узлах  $(\pm h, 0)$  аппроксимируются выражениями

$$\rho_{\alpha m}^{n+1} = \rho_{\pm 1, 0}^{y+1/2}, \quad (2.9)$$

$$A_{\alpha m-1/2}^n \frac{\rho_{\alpha m}^{n+1} - \rho_{\alpha m-1}^{n+1}}{\Delta u \ln(h r_o^{-1})} = g A_{\pm 1, 0}^n (\rho_{\pm 2, 0}^{y+1/2} - \rho_{\pm 1, 0}^{y+1/2})$$

при  $\alpha = \kappa/2(1 \mp 1)$ . Согласно (2.9), т.к. прогоночные коэффициенты для (2.7) при  $\alpha = \kappa/2(1 \mp 1)$  определены, в узлах  $(\pm h, 0)$  имеем разностные граничные условия, необходимые для решения уравнений (2.4) при  $j=0$  и  $i \geq 2$  и  $i \leq -2$ .

Аналогично определяются значения  $\rho_{i,j}^{y+1}$ .

Рассмотрим алгоритм расчета насыщенности. В области, ограниченной  $\Gamma_h$  и  $g_h$ , значения  $s_{i,j}^{n+1}$  определяются по явной схеме.

Производная по времени аппроксимируется разностью вперед:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{\Delta t_n},$$

где  $\Delta t_n = t^{n+1} - t^n$ ; пространственные производные аппроксимируются выражениями

$$\left( q_x \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{i,j} = \begin{cases} q_{x,i,j} \frac{F(s_{i,j}^n) - F(s_{i-1,j}^n)}{h}, & q_x \leq 0, \\ q_{x,i,j} \frac{F(s_{i+1,j}^n) - F(s_{i,j}^n)}{h}, & q_x > 0, \end{cases}$$

$$\left( q_y \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{i,j} = \begin{cases} q_{y,i,j} \frac{F(s_{i,j}^n) - F(s_{i,j-1}^n)}{h}, & q_y \leq 0, \\ q_{y,i,j} \frac{F(s_{i,j+1}^n) - F(s_{i,j}^n)}{h}, & q_y > 0, \end{cases}$$

где  $q_{x,i,j} = A_{i,j}^n \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i,j}^{n+1}$ ,  $q_{y,i,j} = A_{i,j}^n \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{i,j}^{n+1}$  и производные давления аппроксимируются центральными разностями, если узел  $(ih, jh)$  – внутренний, и по трехточечным формулам второго порядка точности для граничных узлов.

Общая структура разностной схемы для (I.4) имеет вид

$$\frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{\Delta t_n} = \left( q_x \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{i,j} + \left( q_y \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{i,j}. \quad (2.10)$$

Уравнения (2.3) аппроксимируются по схеме "неявный левый уголок", если скважина нагнетательная ( $\frac{\partial p_\alpha}{\partial u} < 0$  при всех  $\alpha$ ), и – по схеме "явный правый уголок", если скважина эксплуатационная. Разностные уравнения записываются для указанных случаев в виде

$$\frac{s_{\alpha l}^{n+1} - s_{\alpha l}^n}{\Delta t_n} = f_{\alpha l-1/2} \frac{s_{\alpha l}^{n+1} - s_{\alpha l-1}^{n+1}}{\Delta u}, \quad (2.11)$$

$$\frac{s_{\alpha l}^{n+1} - s_{\alpha l}^n}{\Delta t_n} = f_{\alpha l+1/2} \frac{s_{\alpha l+1}^{n+1} - s_{\alpha l}^{n+1}}{\Delta u}, \quad (2.12)$$

где

$$f_{\alpha l-1/2} = \frac{A_{\alpha l-1/2}^n}{\ln^2(h r_o^{-1}) r_o^2} \left( \frac{r_o}{h} \right)^2 \frac{2(u - \frac{\Delta u}{2})}{\Delta u} \frac{\rho_{\alpha l}^{n+1} - \rho_{\alpha l-1}^{n+1}}{\Delta u} F'(s_{\alpha l-1/2}^n)$$

и  $F' = \frac{dF}{ds}$ . Разностные схемы (2.11), (2.12) являются абсолютно устойчивыми и не требуют итераций по нелинейности.

Значения насыщенности в узлах  $(\pm h, 0)$  и  $(0, \pm h)$  определяются из (2.10), если скважина является эксплуатационной, и эти значения принимаются в качестве граничных для уравнений (2.12). В случае нагнетательной скважины значения  $s$  в узлах определяются из (2.11).

### 3. Методические эксперименты

При отработке разностной схемы большое внимание было удалено изучению влияния на точность численного решения шага пространственной сетки  $h$  и параметра  $g$  (2.8), (2.9). С этой целью были получены численные решения некоторых модельных задач, и эти решения сопоставлялись с точными.

Рассмотрим задачу определения давления, когда насыщенность в начальный момент и на границе, где жидкость втекает в область фильтрации  $\Omega$ , постоянна и равна  $\delta^0$ , и пласт является однородным (т.е.  $K = const$ ). Тогда для определения  $p$  имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \quad (3.1)$$

Рассмотрим гармоническую функцию

$$v = \frac{p_0 - p_1}{2 \ln r_0} \ln(x^2 + y^2) + p_1 \quad (3.2)$$

и пусть на контуре скважины задано условие

$$p(x, y) = p_0, \quad x^2 + y^2 = r_0^2, \quad (3.3)$$

а на внешней границе задано

$$p(x_r, y_r) = v(x_r, y_r), \quad (x_r, y_r) \in \Gamma. \quad (3.4)$$

Тогда  $v(x, y)$  является точным решением задачи (3.1) с граничными условиями (3.3)–(3.4).

По описанному выше алгоритму проведена серия численных расчетов при различных значениях  $h$  и  $g$  с целью выбора параметра  $g$ . Сравнение численных результатов с точным решением (3.2) показало, что максимальная близость точного и численных решений имеет место, когда  $g = \sqrt{2}$ , и это значение не изменяет-

ся при изменении  $h$  и  $g$ . Некоторые результаты представлены в таблицах I и 2, в которых приведены значения точного и численных решений на линии  $y=0$  для разных  $x$ , когда  $p_0=5$ ,  $p_1=1$ ,  $r_0=10^{-4}$  и  $g=\sqrt{2}$ .

Таблица I. Сравнение точного и численных решений

$x$	$v$	$p_1$	$p_2$	$p_3$
0,1	2,0000	2,0112	2,0037	1,9953
0,2	1,6990	1,7053	1,6969	1,6972
0,3	1,5229	1,5247	1,5212	1,5206
0,4	1,3979	1,3985	1,3971	1,3967

Таблица 2. Сравнение градиентов точного и численных решений

$x$	$v_x$	$p_{x1}$	$p_{x2}$	$p_{x3}$
0,1	-4,3429		-4,8675	-4,4620
0,2	-2,1715	-2,4325	-2,2300	-2,1680
0,3	-1,4476	-1,5340	-1,4540	-1,4420
0,4	-1,0857	-1,1185	-1,0830	-1,0780

При этом приняты обозначения:  $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $p_j$  – результаты расчета с шагом  $h_j$ ,  $p_{xj}(x, 0) = [p_j(x+h_j, 0) - p_j(x-h_j, 0)]/(2h_j)$  и  $j=1, 2, 3$ ,  $h_1=0,1$ ,  $h_2=0,05$ ,  $h_3=0,025$ . Шаг  $Δx$  на точность решения не влияет, т.к. по переменной  $u$  решение линейно.

Как видно из таблицы I, расчет даже на сравнительно грубой сетке ( $h=0,1$ ) дает решение, отличющееся от точного меньше, чем на 1%. Погрешность в определении градиента давления максимальна в узлах, соседних с центром скважины, и быстро убывает при удалении от скважины. Как следует из таблицы 2, при расчете с  $h=0,05$ , например, на линии  $y=0$  в точке  $x=0,1$  погрешность в определении градиента давления  $6 \approx 12\%$ , в точке  $x=0,2-6 \approx 3\%$  и в точке  $x=0,3-6 < 1\%$ .

Для изучения влияния радиуса скважины на точность численного решения при фиксированном шаге  $h$  проводились расчеты для разных значений  $r_0$ . Сравнение с точным решением показало, что при изменении  $r_0$  в диапазоне  $10^{-6}-10^{-2}$  точность практически от  $r_0$  не зависит.

Точное решение (3.2) является осесимметричным, т.е.  $v$

не зависит от  $\varphi = \arctg x/y$ . Численное решение с точностью до величины порядка  $\epsilon$  условие (2.6) также является осесимметричным.

Рассмотрим случай, когда решение не является осесимметричным. Предположим, что область фильтрации ограничена сторонами квадрата, длина которых равна 0,5, и в центре квадрата находится скважина радиуса  $r_0$ . Применим к уравнению (3.1) рассмотрим следующую краевую задачу: на контуре скважины задано давление

$$p(x,y) = p_0 \cdot \frac{x^2 + y^2 - r_0^2}{r_0^2} \quad (3.5)$$

на внешнем контуре  $\Gamma$  задано

$$p(x_\Gamma, y_\Gamma) = w(x_\Gamma, y_\Gamma), \quad (x_\Gamma, y_\Gamma) \in \Gamma, \quad (3.6)$$

где

$$w(x,y) = \frac{p_0 - p_1}{2\pi r_0} \ln \frac{x^2 + y^2}{(x+0.5)^2 + y^2} + p_1. \quad (3.7)$$

Очевидно, что решение задачи (3.1) с граничными условиями (3.5)–(3.6) отличается от функции  $w$  на величину, не пре- восходящую

$$d = \max_{x^2 + y^2 = r_0^2} |p - w|.$$

Рассмотрим пример. Пусть  $r_0 = 10^{-4}$ ,  $p_0 = 5$  и  $p_1 = 1$ . Тогда  $d < 10^{-4}$ .

В таблицах 3–5 приведены значения функции  $w$  и численных решений, полученных с разными шагами  $h$  при  $\Delta u = 0.2$  и  $q = \sqrt{2}$  в узлах  $(ih, 0)$  и  $(0, jk)$ ;  $p_1, p_2, p_3$  – численные решения, полученные при расчете с  $h = 0.05, 0.025$  и  $0.0125$ , соответственно.

Таблица 3. Сравнение результатов расчета с функцией  $w$  при  $y=0, x>0$

$y=0, x=$	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
$w(x,y)$	2,1261	1,8415	1,6886	1,5883	1,5159
$p_1(x,y)$	2,1930	1,8736	1,7035	1,5946	1,5159
$p_2(x,y)$	2,1446	1,8453	1,6899	1,5888	1,5159
$p_3(x,y)$	2,1242	1,8387	1,6868	1,5875	1,5159

Таблица 4. Сравнение результатов расчета с функцией  $w$  при  $y=0, x<0$

$y=0, x=$	-0,25	-0,2	-0,15	-0,1	-0,05
$w(x,y)$	1,0000	1,1904	1,3979	1,6510	2,0319
$p_1(x,y)$	1,0000	1,1839	1,3838	1,6255	1,9703
$p_2(x,y)$	1,0000	1,1879	1,3925	1,6421	2,0193
$p_3(x,y)$	1,0000	1,1888	1,3946	1,6457	2,0231

Таблица 5. Сравнение результатов расчета с функцией  $w$  при  $x=0$

$x=0, y=$	-0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
$w(x,y)$	2,0837	1,7650	1,5856	1,4652	1,3779
$p_1(x,y)$	2,1038	1,7743	1,5884	1,4660	1,3779
$p_2(x,y)$	2,0881	1,7627	1,5837	1,4642	1,3779
$p_3(x,y)$	2,0874	1,7608	1,5831	1,4649	1,3779

Из таблиц видно, что погрешность убывает при удалении от скважины и величина ее (это справедливо и для производных) такого же порядка как и в осесимметричном случае – погрешность решения не превышает 3%, когда между скважиной и внешней границей имеется 5 узлов сетки, и меньше 1%, когда число узлов между скважиной и внешней границей больше 10.

При отработке полной схемы расчета проводилось сравнение с решением плоско-радиальной задачи о вытеснении несмешивающихся несжимаемых жидкостей. Для этого на окружности радиуса 1 (внешний контур  $\Gamma$ ) задавалось постоянное давление  $p_1$ ; на контуре скважины задавалось насыщенность вытесняющей фазы  $s_0$ , и полный суммарный расход  $\int A(s_0) \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = q < 0$  или давление  $p_0$  ( $p_0 > p_1$ )

в начальный момент задавалось постоянное поле насыщенности  $s^\alpha$ . Полученное численное решение сравнивалось в случае заданного расхода с точным решением [6] и, если задавалось давление, сравнение проводилось с численным решением одномерной плоско-радиальной задачи, полученным в [3].

Как показали результаты сравнения, численное решение модельной плоской задачи удовлетворительно воспроизводит движение скачка насыщенности при условиях на скважине как I-го, так и II-ого рода. Профили насыщенности на лучах, исходящих

из центра скважины, близки к точным там, где решение непрерывно; скачок "размазывается" на 4-5 узлов. Наибольшее "размазывание" скачка имеет место на лучах  $y=\pm x$ , где фактически шаг сетки равен  $\sqrt{2}h$ .

#### 4. Двухфазная фильтрация в пятиточечной системе скважин

С помощью описанного выше численного метода могут быть решены различные задачи двухфазной фильтрации. Рассмотрим задачу нестационарной двухфазной фильтрации в пятиточечной системе скважин (система состоит из бесконечного числа квадратов, в вершинах которых находятся нагнетательные скважины, а в центрах - эксплуатационные).

Рассмотрим квадрат, в противоположных вершинах которого находятся эксплуатационная и нагнетательная скважина, и на сторонах квадрата заданы условия симметрии. Пусть нагнетательная скважина находится в точке  $(0,0)$ , эксплуатационная - в точке  $(1,1)$  и пласт является однородным.

На контуре нагнетательной скважины задаются насыщенность вытесняющей фазы  $s_0$  и суммарный расход жидкости  $A(s_0) \cdot r \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = q$  ( $q < 0$ ) ; на контуре эксплуатационной скважины - давление  $p_1$ . В начальный момент задается постоянное поле насыщенности  $s^0$ .

Были выполнены расчеты при  $\mu_1 \mu_2^{-1} = 1/2$ ,  $\zeta = 10^{-4}$ ,  $q = -0.5$ ,  $p_1 = 1$ ,  $s_0 = 1$  и  $s^0 = 0$  фазовые проницаемости принимались в виде  $\mu_1 = (1-s)^2$  и  $\mu_2 = s^2$ . Результаты расчетов сравнивались с решением данной задачи, полученным по методу зональной линеаризации [7].

На рис. I,2 представлены профили насыщенности в момент времени  $t=0.3$  на лучах  $y=x$  и  $y=0$ , соответственно.

Пунктиром показаны кривые профилей, полученные в [7], а сплошными линиями - результаты расчета. Кривые I и 2

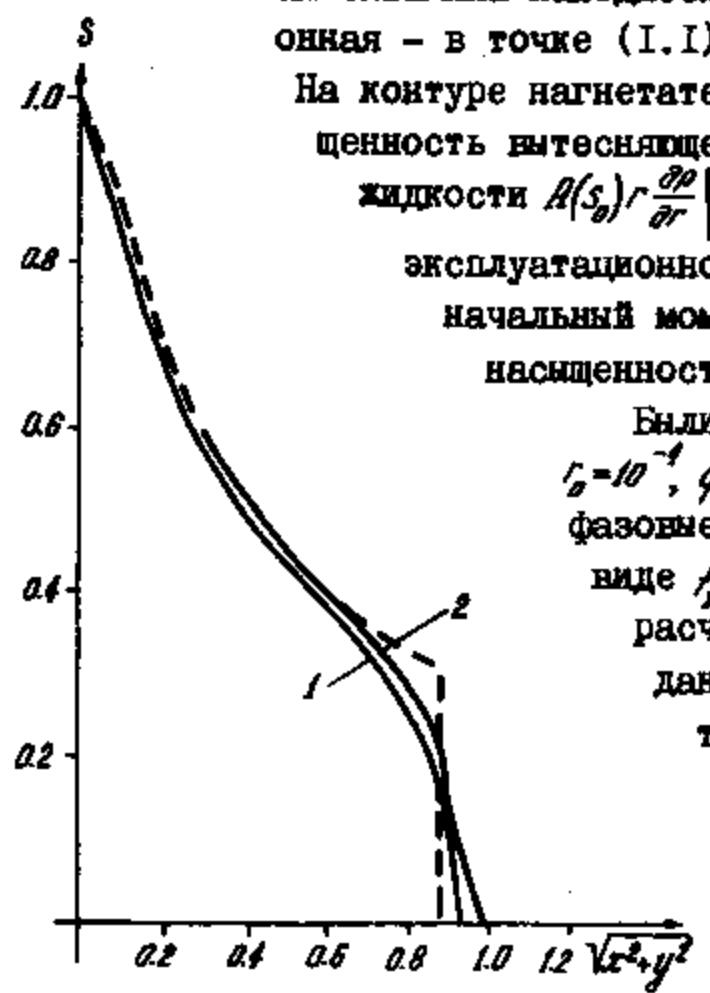


Рис. I. Профили насыщенности на луче, соединяющем скважины ( $y=x$ ).

получены при расчетах с шагом  $h = 0.0666..$  и  $0.0333$ , соответственно. Как видно из рис. I,2, расчет дает удовлетворительное совпадение результатов с решением [7], когда  $h$  не превышает  $0.0333$ . При этом следует отметить, что в отличие от метода зональной линеаризации предложенный численный метод без дополнительных трудностей переносится на случай, когда пласт является неоднородным.

#### 5. Задача о взаимодействии двух фронтов

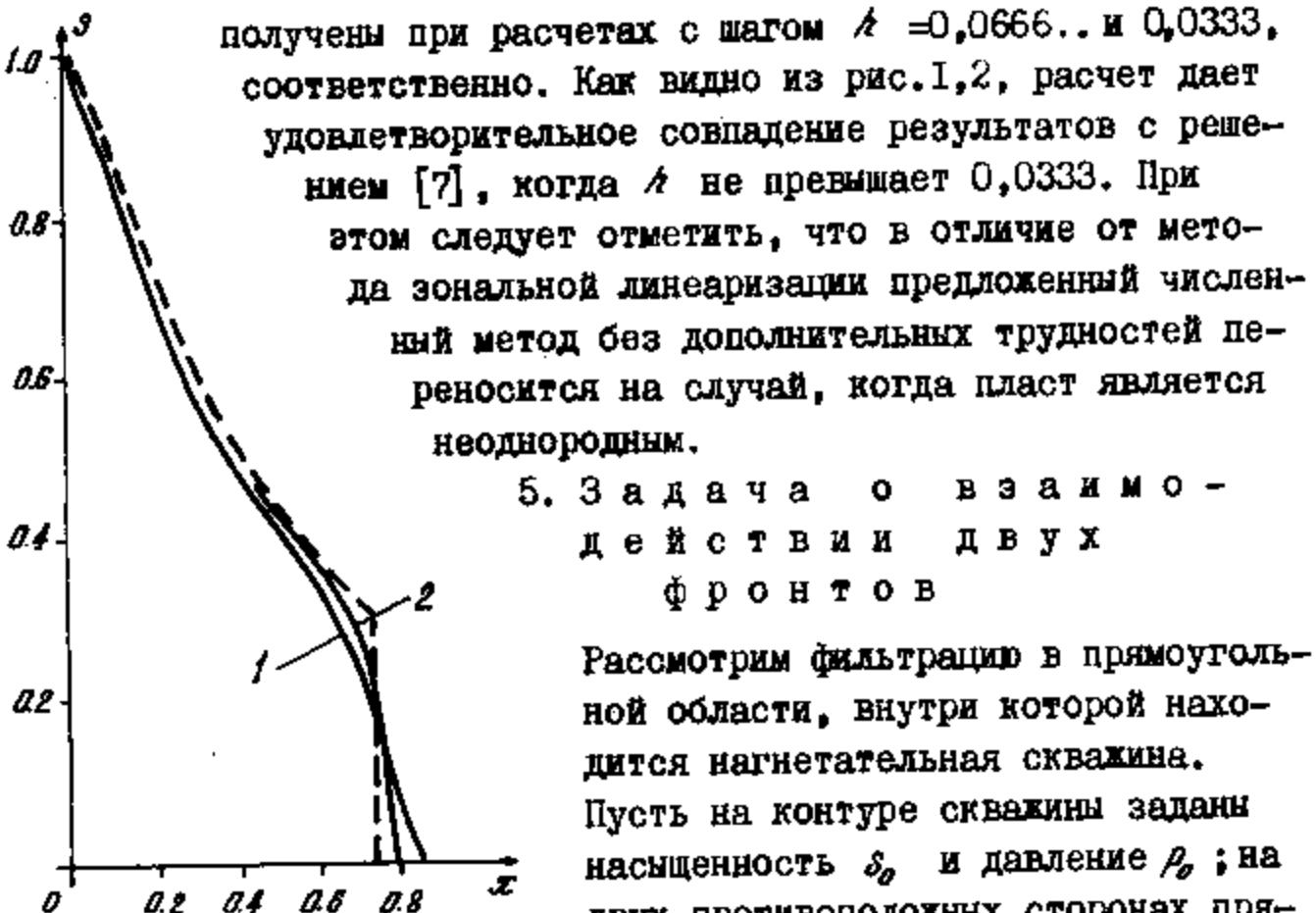


Рис. 2. Профили насыщенности на луче  $\varphi=0$  ( $y=0$ ).

Рассмотрим фильтрацию в прямоугольной области, внутри которой находится нагнетательная скважина. Пусть на контуре скважины заданы насыщенность  $s_0$  и давление  $p_0$ ; на двух противоположных сторонах прямоугольника заданы условия непротекания (производная давления по нормали равна нулю), на двух других сторонах заданы постоянные давления  $p_-$  и  $p_+$  ( $p_- < p_0, p_+ < p_0$ ) и на стороне, где давление равно  $p_+$ , задана насыщенность  $s_0$ . В начальный момент в области фильтрации задается постоянное поле насыщенности  $s^0$ .

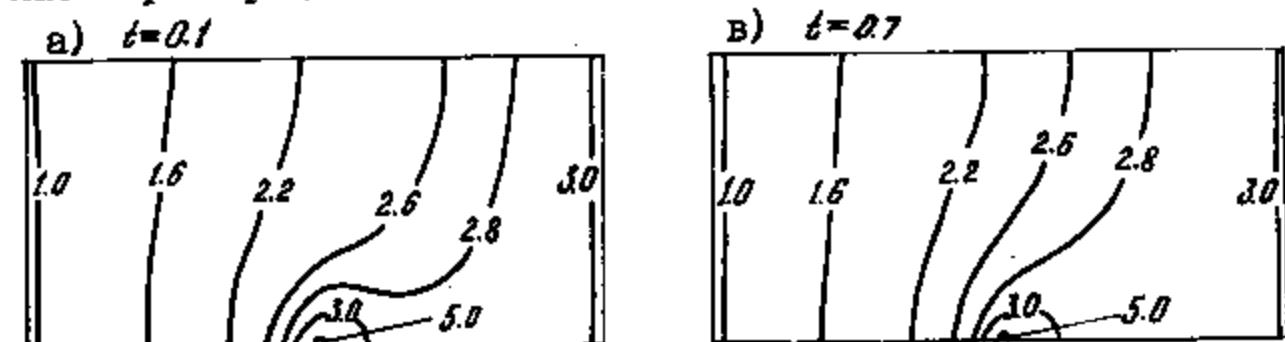
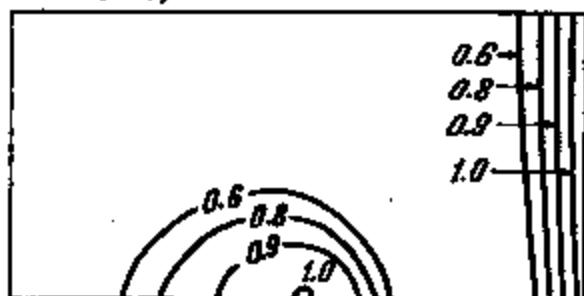


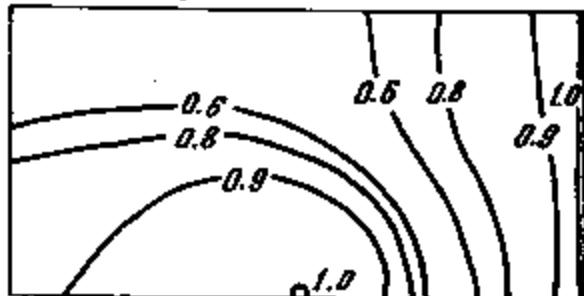
Рис. 3. Изобары

Для поставленной задачи были выполнены расчеты при  $\mu_1 \mu_2^{-1} = 1$ ,  $\zeta = 10^{-4}$ ,  $p_0 = 5$ ,  $p_+ = 3$ ,  $p_- = 1$ ,  $s_0 = 1$  и  $s^0 = 0$ , когда скважина находится в центре квадрата со стороной, равной 1; фазовые проницаемости задавались теми же формулами, что и в 4. Результаты расчетов представлены на рис. 3 и 4. На рис. 3 в моменты времени  $t=0.1$  и  $0.7$  (рис. 3а и 3в соответственно) изображены

a)  $t=0.1$



b)  $t=0.4$



c)  $t=0.7$

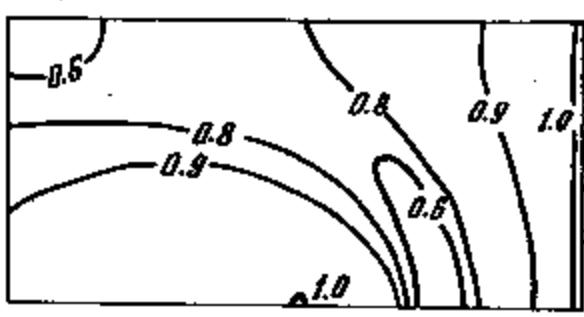


Рис.4. Изосаты

- оператора Лапласа. ИМ и МФ, т.2, № 2, 364-373, 1972.
3. В.Б.Таранчук. Численный метод для определения давления и насыщенности при плоско-радиальном вытеснении нефти водой. Сборник "Численные методы механики сплошной среды", т.5, №3, Новосибирск, 1974.
4. В.Л.Данилов, А.Н.Коновалов, С.И.Якуба. Об уравнениях и краевых задачах теории двухфазных фильтрационных течений в пористой среде. ДАН СССР, т.183, № 2, 307-310, 1968.
5. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. "Наука", М., 1971.
6. Г.И.Баренблatt, В.М.Ентов, В.М.Рыхик. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. "Недра", М., 1972.
7. В.Л.Данилов, Р.М.Кац. Метод зональной линеаризации в нелинейных многомерных задачах массопереноса в пористых средах. Изв.АН СССР, ММГ, № 4, 66-80, 1973.

Поступила 20.УП.1974.

линии  $\rho = \text{const}$ . Следует отметить, что для данной задачи поле давления с изменением времени меняется незначительно. На рис.4а, в и с для моментов времени  $t=0.1, 0.4$  и 0.7 соответственно, изображены линии  $s=\text{const}$ . Как видно из рис.4, перед скважиной образуется застойная зона, где насыщенность  $s$  остается постоянной и близкой  $s^*$ . Размеры застойной зоны со временем уменьшаются незначительно, поэтому вытеснение является неполным.

#### Л и т е р а т у р а

1. Г.Г.Вахитов. Эффективные способы решения задач разработки нефтеносных пластов методом конечных разностей. М., Гостоптехиздат, 1963.
2. В.Б.Андреев, С.А.Кряквина. О функции источника сеточного оператора Лапласа. ИМ и МФ, т.2, № 2, 364-373, 1972.
3. В.Б.Таранчук. Численный метод для определения давления и насыщенности при плоско-радиальном вытеснении нефти водой. Сборник "Численные методы механики сплошной среды", т.5, №3, Новосибирск, 1974.
4. В.Л.Данилов, А.Н.Коновалов, С.И.Якуба. Об уравнениях и краевых задачах теории двухфазных фильтрационных течений в пористой среде. ДАН СССР, т.183, № 2, 307-310, 1968.
5. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. "Наука", М., 1971.
6. Г.И.Баренблatt, В.М.Ентов, В.М.Рыхик. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. "Недра", М., 1972.
7. В.Л.Данилов, Р.М.Кац. Метод зональной линеаризации в нелинейных многомерных задачах массопереноса в пористых средах. Изв.АН СССР, ММГ, № 4, 66-80, 1973.

Институт проблем механики  
АН СССР, Москва.

Академия Наук СССР Сибирское отделение  
Вычислительный центр

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Том 5 № 4

Новосибирск 1974

#### С о д е р ж а н и е

1. Ю.Я.Белов. Об аппроксимации неэволюционных систем уравнений . . . . .	5
2. М.А.Гришин, Е.Е.Зеленский. О релаксационных колебаниях при горении реагирующих веществ . . . . .	14
3. А.Л.Дорфман. К расчету затопленной струи . . . . .	26
4. Т.И.Зеленяк, В.А.Новиков, Н.Н.Яненко. О свойствах решения нелинейных уравнений переменного типа . . . . .	35
5. Б.И.Квасов, В.В.Кобков. Сплайны с дополнительными узлами П. Их пределы и некоторые свойства . . . . .	48
6. В.И.Кузин. Стационарная ветровая циркуляция в мировом океане . . . . .	71
7. Е.Н.Кузнецов, В.Я.Ривкинд. Решение одной задачи фильтрации . . . . .	85
8. В.Б.Таранчук, Л.А.Чудов. Численный метод для решения некоторых задач плоской двухфазной фильтрации в области со скважинами . . . . .	90
9. П.Б.Филоненко. Численный метод расчета одной панели на гибких ребрах . . . . .	103
10. И.В.Фрязинов. О схеме переменных направлений для уравнения теплопроводности со смешанными производными . .	110
II. В.П.Шапеев. Задача о непрерывном примыкании ДП-решений одномерных уравнений динамики неупругой сплошной среды.	116