

ны и внешнего контура соответственно.

Введем безразмерные переменные:

$$t' = \frac{t \langle p \rangle K}{m R^2 \mu_1}, r' = \frac{r}{R}, p' = \frac{p}{\langle p \rangle}, \mu' = \frac{\mu_i}{\mu_2}, \quad (I.3)$$

где $\langle p \rangle$ - характерное давление.

После преобразований и введения безразмерных переменных из (I.1)-(I.2) получаем для определения p' и s систему

$$\frac{\partial}{\partial r'} \left[r' (f_1 + \mu' f_2) \frac{\partial p'}{\partial r'} \right] = 0, \quad (I.4)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t'} = \frac{q'}{r'} \frac{\partial F}{\partial r'}, \quad (I.5)$$

где

$$F(s) = \mu' f_2 (f_1 + \mu' f_2)^{-1} \quad \text{и} \quad q'(t') = r' (f_1 + \mu' f_2) \frac{\partial p'}{\partial r'}$$

(величина $q'(t')$ есть безразмерный суммарный расход жидкости через трубку тока).

Применимально к системе (I.4)-(I.5) рассматривается краевая задача для области $r'_0 \leq r' \leq 1$ с граничными условиями

$$p'(r'_0, t') = p_0(t'), \quad (I.6)$$

$$p'(1, t') = p_1(t'), \quad (I.7)$$

$$s(r'_0, t') = s_0, \quad (p_0 > p_1) \quad (I.8)$$

и начальными условиями

$$s(r', 0) = s^0, \quad r'_0 \leq r' \leq 1. \quad (I.9)$$

Штрихи над безразмерными величинами в дальнейшем опускаются.

2. При численном решении задачи (I.4)-(I.9) возникают трудности, связанные с разрывностью решения [1], а также с наличием больших градиентов в окрестности скважины, имеющей малый радиус.

Для решения системы (I.4)-(I.5) применяется численный метод, основанный на следующей схеме (сравни [2]). Пусть известно распределение насыщенности в момент времени t'' . Переход к моменту времени $t''' = t'' + \tau_\kappa$ осуществляется в два этапа: а) по известному распределению насыщенности на слое t''

В.Б. ТАРАНЧУК

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ И НАСЫЩЕННОСТИ ПРИ ПЛОСКО-РАДИАЛЬНОМ ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ВОДОЙ

Предложен численный метод "сквозного" расчета для определения давления и насыщенностей в задаче одномерной радиальной изотермической фильтрации несжимаемых несмешивающихся жидкостей в недеформируемой пористой среде, когда капиллярные эффекты не учитываются. Рассмотрена задача о вытеснении нефти водой, закачиваемой в скважину.

Проведено сравнение некоторых разностных схем для аппроксимации уравнения Баклея-Леверетта.

I. Пренебрегая гравитационными и капиллярными эффектами, систему уравнений, описывающих нестационарную изотермическую двухфазную радиальную фильтрацию несжимаемых несмешивающихся жидкостей в недеформируемой однородной пористой среде, записем в виде [1]

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\kappa}{\mu_2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r f_2 \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (I.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\kappa}{\mu_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r f_1 \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (I.2)$$

Здесь $s(r, t)$ - насыщенность смачивающей фазы, $p(r, t)$ - давление, κ - пористость, μ - абсолютная проницаемость, $f_i(s)$ - относительные фазовые проницаемости ($i=1, 2$), μ_i - вязкость i -ой фазы ($i=1, 2$), (индексы $i=1$ и 2 относятся к несмачивающей и смачивающей фазам, соответственно), t - время, $0 \leq t \leq T$, r - полярный радиус, $r_0 \leq r \leq R$, где r_0 и R - радиусы скважи-

из уравнения (I.4), используя граничные условия (I.6), (I.7), находим давление ρ , а затем — $q(t'')$;

б) из уравнения (I.5), используя определенное значение $q(t'')$ и условие (I.8), определяем насыщенность s в момент t^{K+1} .

Для преодоления трудностей, связанных с расчетом в области больших градиентов, разобьем область $z \leq r \leq 1$ на две подобласти: "внутреннюю" — $r_0 \leq r \leq z$ и "внешнюю" — $z \leq r \leq 1$ ($z \sim 0,1$) и во "внутренней" области перейдем к новой переменной

$$u = \ln \frac{r}{r_0} \ln^{-1} \frac{z}{r_0}, \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (2.1)$$

Уравнение (I.4) во "внутренней" области с учетом замены (2.1) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[(f_1 + \mu f_2) \frac{\partial p}{\partial u} \right] = 0. \quad (2.2)$$

а уравнение (I.5) во "внутренней" области запишем, не переходя к переменной u , в виде

$$\frac{ds}{dt} = \frac{q}{r} F' \frac{ds}{dr}, \quad (2.3)$$

где

$$F'(s) = \frac{dF(s)}{ds}.$$

Таким образом, задача сводится к определению давления ρ , удовлетворяющего уравнению (2.2) во "внутренней" области и уравнению (I.4) во "внешней" области, с граничными условиями (I.6), (I.7), и насыщенности s , удовлетворяющей уравнению (2.3) во "внутренней" области и уравнению (I.5) во "внешней" области с граничным условием (I.8).

В качестве условий на общей границе "внутренней" и "внешней" областей приняты условия непрерывности ρ , q и s .

Во "внутренней" области вводится сетка, равномерная по u с узлами $u_i = i/n$, ($i=0,1,\dots,n$); значения давления и насыщенности в узлах u_i в момент t'' обозначаются p_i^{**} и s_i^{**} . Во "внешней" области вводится сетка, равномерная по r , с узлами $r_j = z + jh$ ($h=(1-z)/m$, $j=0,1,\dots,m$); значения ρ и s в узлах r_j в момент t'' обозначаются p_j^{**} и s_j^{**} .

Уравнения (2.2) и (I.1) в соответствующих областях аппроксимируются разностными уравнениями

$$K_{i+1/2}^* (p_{i+1}^{**} - p_i^{**}) - K_{i-1/2}^* (p_i^{**} - p_{i-1}^{**}) = 0, \quad (2.4)$$

$$r_{j+1/2} K_{j+1/2} (p_{j+1}^{**} - p_j^{**}) - r_{j-1/2} K_{j-1/2} (p_j^{**} - p_{j-1}^{**}) = 0, \quad (2.5)$$

где $i=1,2,\dots,n-1$, $j=1,2,\dots,m-1$.

$$K_{i \pm 1/2}^* = K(s_{i \pm 1/2}^{**}), \quad K_{j \pm 1/2}^* = K(s_{j \pm 1/2}^{**}), \quad r_{j \pm 1/2}^* = \frac{r_{j \pm 1} + r_j}{2},$$

$$s_{i \pm 1/2}^{**} = \frac{s_{i \pm 1/2}^{**} + s_i^{**}}{2}, \quad s_{j \pm 1/2}^{**} = \frac{s_{j \pm 1/2}^{**} + s_j^{**}}{2}, \quad K(s) = f_1(s) + \mu f_2(s).$$

Уравнения (2.4)–(2.5) решаются методом прогонки. Условия на общей границе "внутренней" и "внешней" областей записываются в виде

$$p_n^{**} = p_0^{**}, \quad \frac{K_{n-1/2}^*}{\ln z/r_0} \frac{p_n^{**} - p_{n-1}^{**}}{1/n} = K_{1/2}^* r_{1/2}^* \frac{p_1^{**} - p_0^{**}}{k}, \quad (2.6)$$

а значение q вычисляется по формуле

$$q(t'') = r_{l+1/2} K_{l+1/2} \frac{p_{l+1}^{**} - p_l^{**}}{h}, \quad (2.7)$$

где l — любое целое число ($0 \leq l < m$).

Для аппроксимации (2.3) во "внутренней" области применяется абсолютно устойчивая схема "левый левый уголок" [3], которая записывается в виде

$$\frac{s_{i+1}^{**+1} - s_{i+1}^{**}}{\tau_K} = \frac{q(t'')}{r_{i+1/2}^*} F(s_{i+1/2}^{**}) \frac{s_{i+1}^{**+1} - s_i^{**}}{r_{i+1}^* - r_i^*}, \quad (2.8)$$

где

$$r_{i+1/2}^* = (r_{i+1}^* + r_i^*)/2 \quad \text{и} \quad r_i^* = r_0 \left(\frac{z}{r_0}\right)^{i/n}.$$

Значения s_{i+1}^{**+1} ($i=0,1,\dots,n-1$) определяются из (2.8) последовательно без итераций ($s_0^{**+1} = s_0$).

Во "внешней" области уравнение (I.5) аппроксимируется по схеме "левый левый уголок" [3], которая записывается в виде

$$\frac{s_{j+1}^{**+1} - s_{j+1}^{**}}{\tau_K} = \frac{q(t'')}{r_{j+1/2}^* h} (F(s_{j+1/2}^{**}) - F(s_j^{**})), \quad (2.9)$$

$$j=0,1,\dots,m-1 \quad \text{и} \quad s_n^{**+1} = s_n^{**+1}.$$

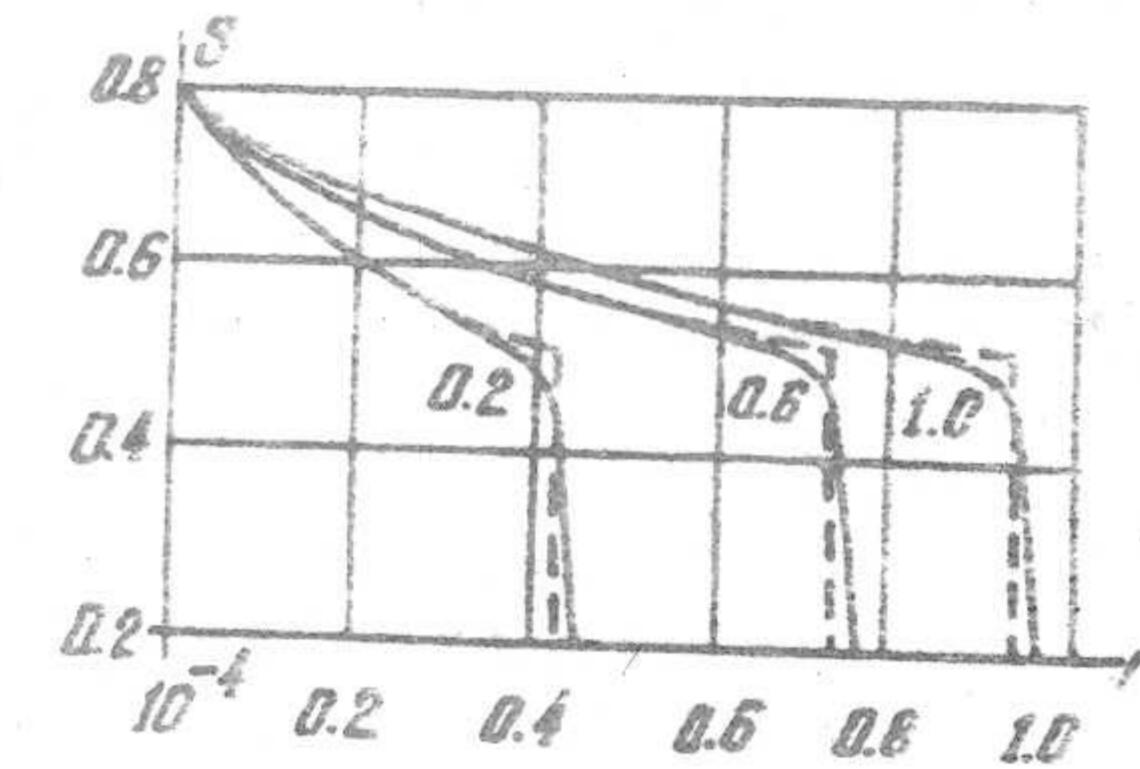


Рис.1.

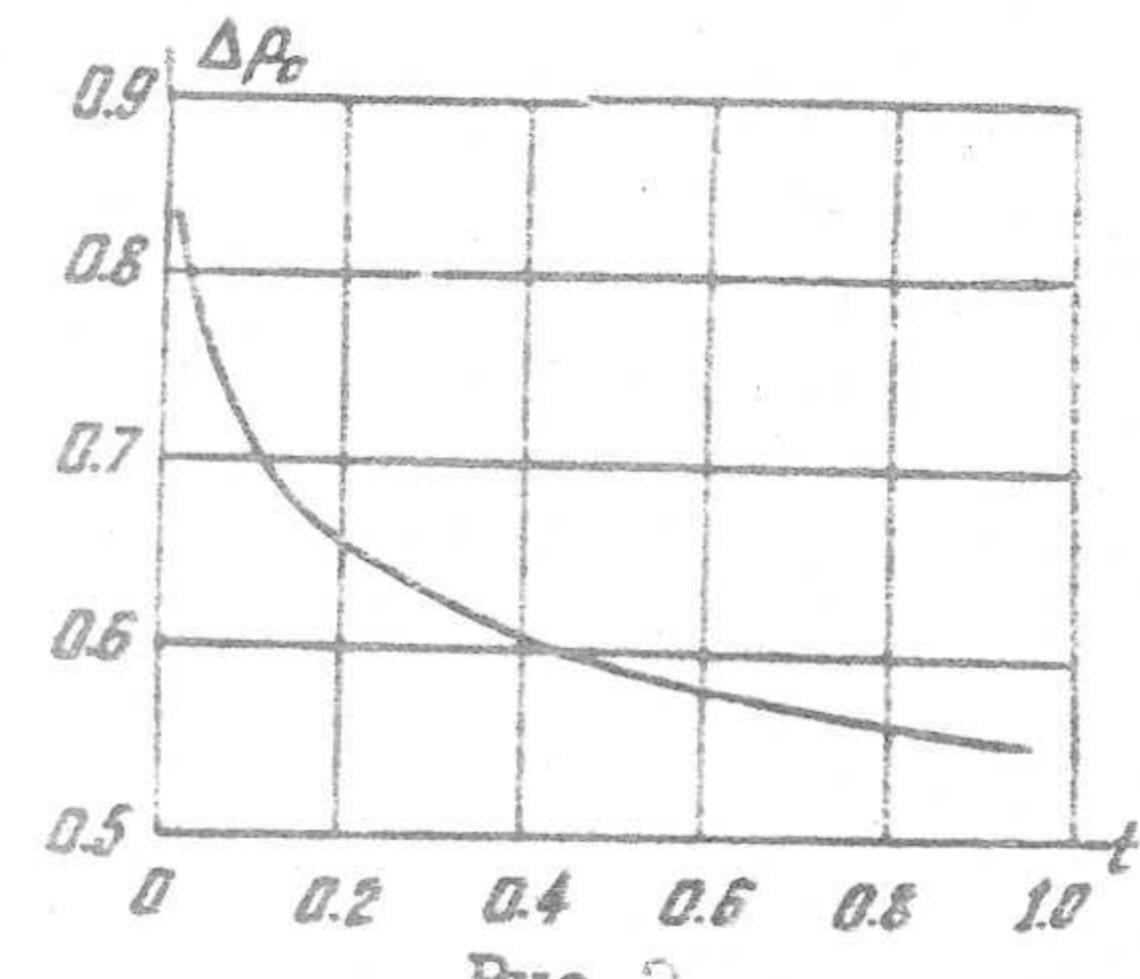


Рис.2.

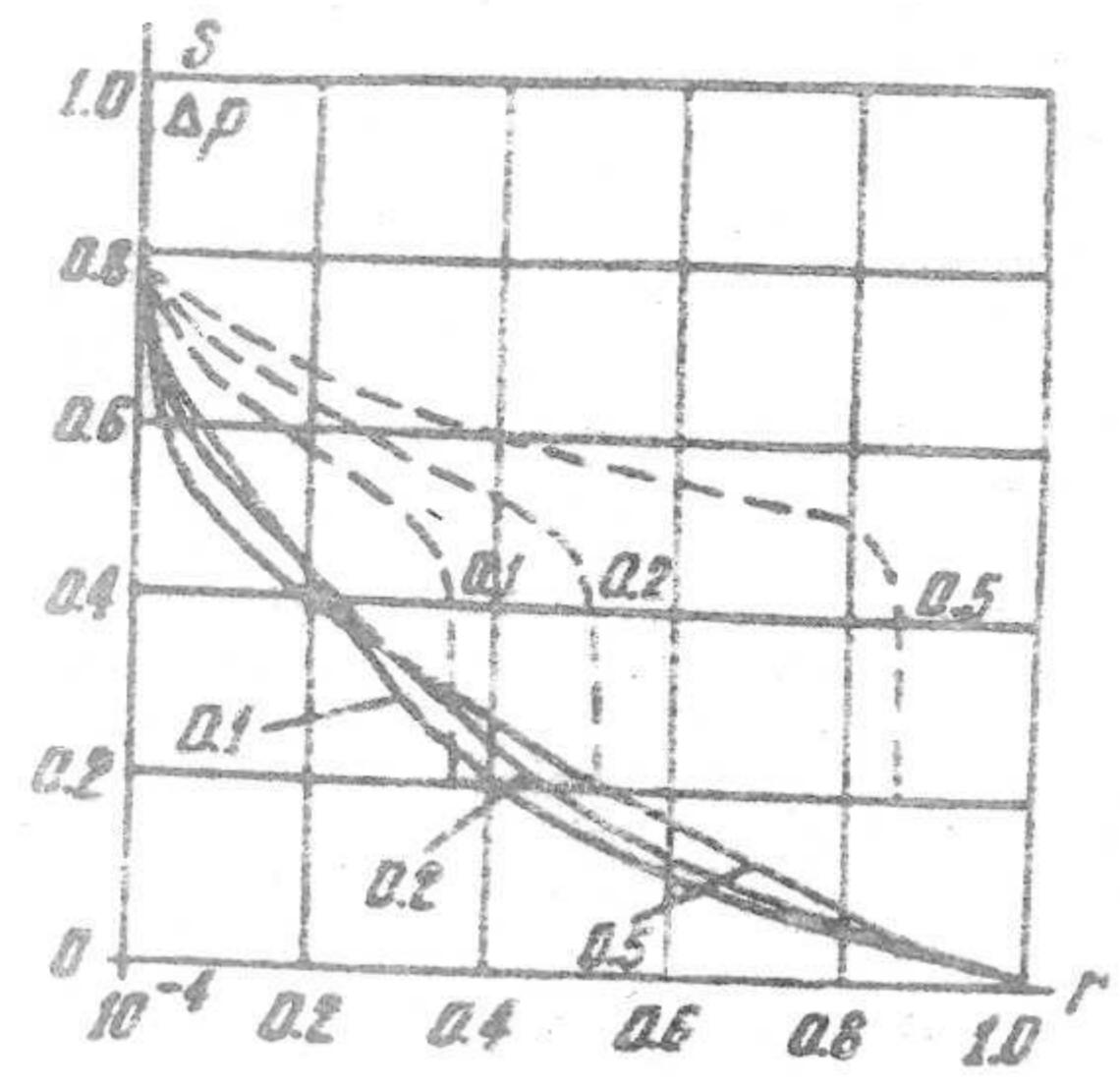


Рис.3.

$$f_1 = 4.6295(0.8 - S)^2, f_2 = 1.9531(S - 0.2)^2 \quad (3.1)$$

$$r^0 = 10^{-6}, q = -0.15, \mu = 10, S_0 = 0.8 \text{ и}$$

$$S^0 = 0.2 (z = 0.05, R = 10, M = 76).$$

На рисунке I пунктиром показаны распределения насыщенности в соответствующие моменты времени, полученные аналитически, а сплошными линиями – результаты расчета. На рис.2 показано, как изменяется во времени перепад давления $\Delta P_0 = p(r_0, t) - p_0$, при постоянном значении q .

Временной шаг τ_K выбирается так, чтобы выполнялось условие устойчивости схемы (2.9):

$$A = \max_{0 \leq j \leq M} \left| \frac{q(\tau^K)}{\tau_{j+1/2}} F'(S_{j+q/2}^K) \right| \leq 1. \quad (2.10)$$

В ходе счета временной шаг удваивается, как только A становится меньше 0,5.

Предложенный выше метод расчета может быть применен для изучения совместной фильтрации трех и более несмешивающихся нескимаемых жидкостей, а также для изучения фильтрации в неоднородной пористой среде.

3. По описанному алгоритму проводились расчеты при разных значениях μ, f_i и различных видах функций относительных фазовых проницаемостей.

В случае, если вместо условия (I.6) задается условие $q = c(t)$ при $r = r_0 (c < 0)$, нет необходимости определять p и S совместно. Распределение насыщенности может быть найдено аналитически [1].

На рис.1,2 представлены результаты расчета. Функции относительных фазовых проницаемостей задавались формулами [2]

$$f_1 = 4.6295(0.8 - S)^2, f_2 = 1.9531(S - 0.2)^2 \quad (3.1)$$

$$r^0 = 10^{-6}, q = -0.15, \mu = 10, S_0 = 0.8 \text{ и}$$

$$S^0 = 0.2 (z = 0.05, R = 10, M = 76).$$

На рисунке I

пунктиром показаны распределения насыщенности в соответствующие моменты времени, полученные аналитически, а сплошными линиями – результаты расчета. На рис.2 показано, как изменяется во времени перепад давления $\Delta P_0 = p(r_0, t) - p_0$, при постоянном значении q .

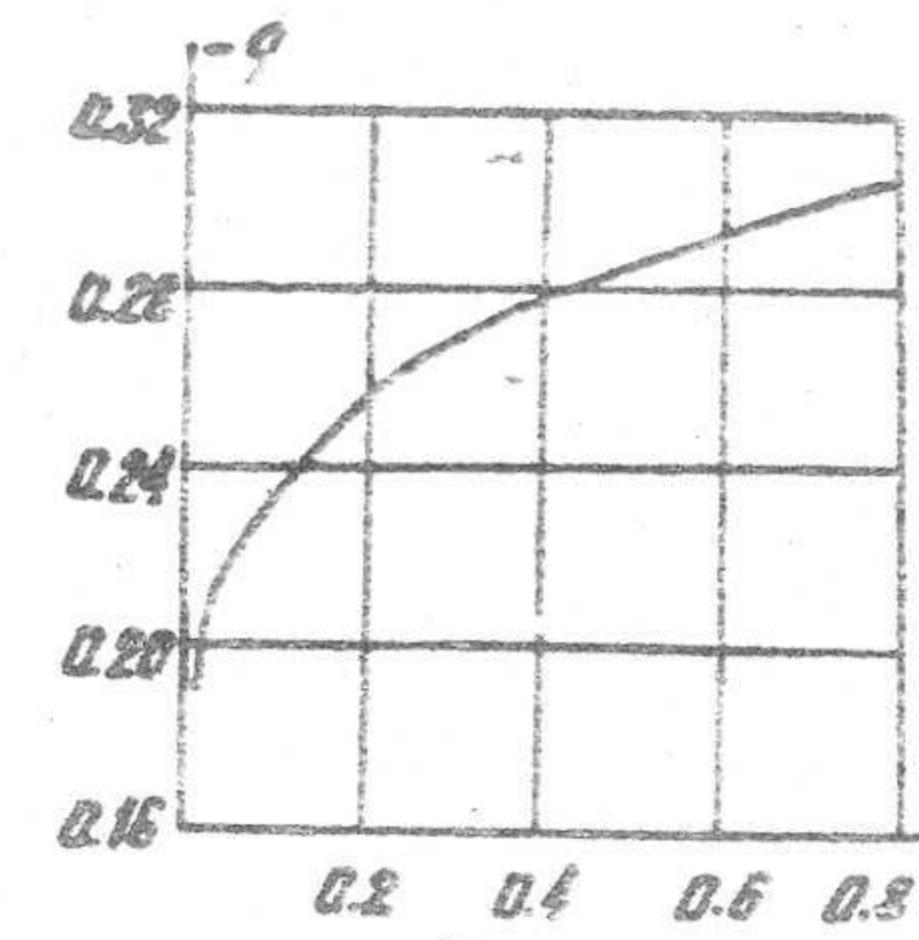


Рис.4.

На рис.3 представлены графики, иллюстрирующие распределения насыщенности (пунктиром) и давления $\Delta p = p(r, t) - p_0$ в разные моменты времени. Из графиков видно, что давление резко возрастает при уменьшении q . Рис. 4 иллюстрирует изменение во времени q при постоянном перепаде давления.

4. При выборе разностной аппроксимации для уравнения (I.5) проведена серия расчетов по разным схемам; результаты сравнивались с точным решением.

Рассмотрим уравнение (I.5) во "внешней" области $z < r \leq 1$ с начальным условием $s(r, 0) = S_0$ и граничным условием $s(z, t) = S_f = \text{const}$.

Рассматривались следующие разностные схемы для уравнения (I.5) [3]:

$$\frac{s_{j+1}^{K+1} - s_{j+1}^K + s_j^{K+1} - s_j^K}{2\tau_K} = \frac{q}{\tau_{j+1/2} h} F'(S_{j+q/2}^K) \frac{s_{j+1}^K - s_j^K + s_{j+1}^K - s_j^K}{2}, \quad (4.1)$$

$$\frac{s_{j+1}^{K+1} - s_{j+1}^K + s_j^{K+1} - s_j^K}{2\tau_K} = \frac{q}{\tau_{j+1/2} h} F'(S_{j+q/2}^K) (s_{j+1}^{K+1} - s_j^{K+1}), \quad (4.2)$$

$$\frac{s_{j+1}^{K+1} - s_{j+1}^K}{\tau_K} = \frac{q}{\tau_{j+1/2} h} F'(S_{j+q/2}^K) (s_{j+1}^{K+1} - s_j^{K+1}), \quad (4.3)$$

схема Лакса:

$$\frac{s_j^{K+1} - \frac{1}{2}(s_{j-1}^K + s_{j+1}^K)}{\tau_K} = \frac{q}{2\tau_j h} (F(S_{j+1/2}^K) - F(S_{j-1/2}^K)), \quad (4.4)$$

явная схема второго порядка точности "чехарда":

$$\frac{s_{j+1/2}^{K+1/2} - \frac{1}{2}(s_{j+1}^K + s_j^K)}{\tau_{j+1/2}} = \frac{q}{\tau_{j+1/2} h} (F(S_{j+1/2}^K) - F(S_j^K)), \quad (4.5)$$

$$\frac{s_j^{K+1/2} - s_j^K}{\tau_K} = \frac{q}{\tau_j h} (F(S_{j+1/2}^{K+1/2}) - F(S_{j-1/2}^{K+1/2})),$$

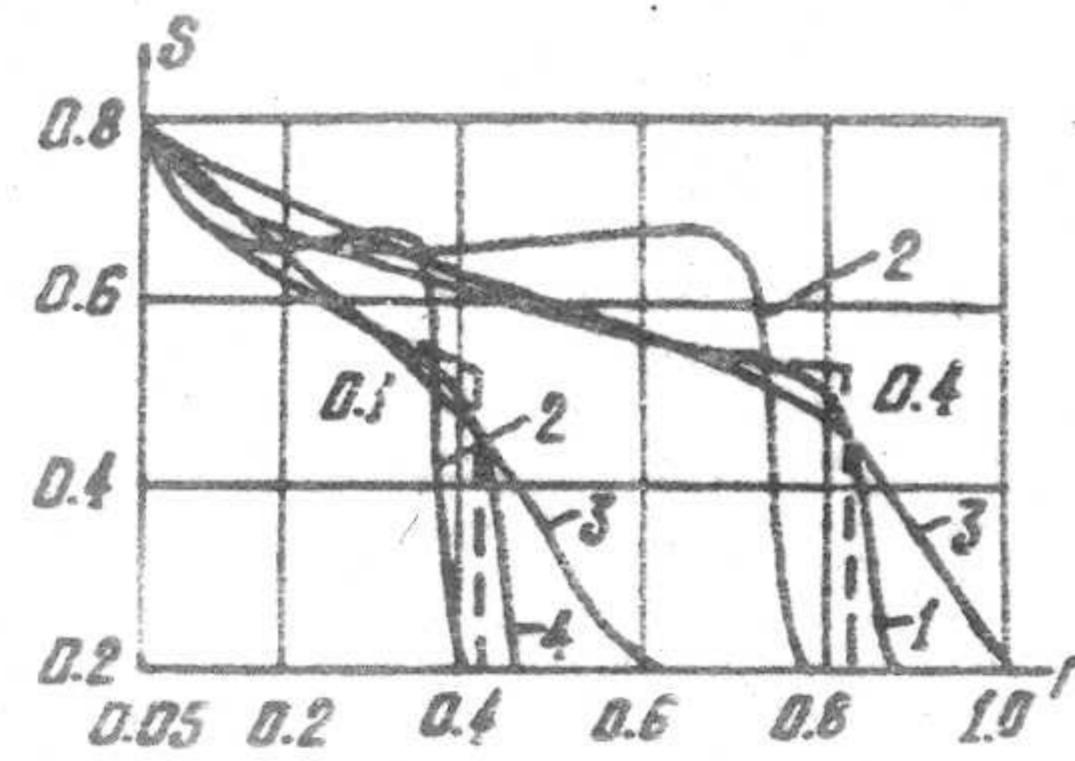


Рис.5.

решение искается следующим эффектом: на решение в невозмущенной области накладывается пилообразное возмущение, меняющее знак от точки к точке (схемы дают неудовлетворительные результаты при числах Куранта, близких к нулю).

На рис.5 представлены результаты численных расчетов, полученных по схемам (4.4), (4.5) и (2.9) для двух моментов времени $t=0.1, 0.4$. Функции относительных проницаемостей вычислялись по формулам (3.1), $z=0.05$, $q=-0.325$, $h=0.025$, $\mu=8$, $S_1=0.8$, $\delta^0=0.2$ и временной шаг τ_h выбирался так, чтобы выполнялось условие $0.5 \leq A \leq 1$.

Пунктиром на рис.5 показано точное решение уравнения (1.5), цифрами 1,2 и 3 обозначены кривые, полученные с помощью схем (2.9), (4.5) и (4.4) соответственно.

Из графиков видно, что схема (4.4) дает неудовлетворительные результаты, т.к. сильно "размазывает" скачок (аппроксимационная вязкость схемы велика).

Немонотонная схема (4.5) хорошо воспроизводит скачок, но дает завышение максимального значения насыщенности на скачке и отставание скачка (сравни [4]).

Схема (4.3) при числах Куранта, не превышающих единицы, дает результаты, незначительно отличающиеся от результатов, полученных по схеме (2.9), которая "размазывает" скачок на 4-5 узлов и удовлетворительно воспроизводит движение скачка.

При уменьшении шага h численное решение, полученное по схеме "чехарда", не стремится к точному решению. Скачок остается завышенным, сохраняется плато, где насыщенность близка к константе.

Численное решение, полученное по схеме (2.9), с уменьшением шага h приближается к точному.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Л.А.Чудову за руководство работой.

Л и т е р а т у р а

1. Г.И.Баренблatt, В.М.Ентов, В.М.Рыжик. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. "Недра", М., 1972.
2. А.Н.Коновалов. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Лекции для студентов НГУ. Новосибирск, 1972.
3. Г.С.Росляков, Л.А.Чудов. Численные методы в механике сплошных сред. ч.2. Ротапринт ВЦ МГУ, М., 1969.
4. А.В.Королев, Б.В.Шалимов, М.И.Швидлер. О некоторых разностных схемах для численного решения задач двухфазной фильтрации. "Всесоюзная школа по теоретическим исследованиям численных методов механики сплошных сред". Тезисы докладов. Ротапринт института проблем механики АН СССР, М., 1973.

Поступила 7. VI. 1974.

Институт проблем механики
АН СССР, Москва.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ТОМ 5, №3



НОВОСИБИРСК - 1974