



# Весці БДПУ

Навукова-метадычны часопіс  
Выдаецца з чэрвеня 1994 г.

№ 2(64) 2010

СЕРЫЯ 3.  
Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка.  
Біялогія. Геаграфія

## Змест

Галоўны рэдактар:  
П.Дз. Кухарчык

**Рэдакцыйная камітэт:**

Ю.А. Быкадораў  
(нам. галоўнага  
рэдактара)

У.В. Амелькін

В.А. Бондар

М.К. Буза

І.В. Бялько

А.М. Вітчанка

В.М. Дабранскі

В.Б. Кадацкі

В.Н. Кісялёў

У.М. Котаў

М.В. Лазаковіч

М.І. Лістапад

І.А. Новік

В.М. Русак

І.М. Сцяпановіч

В.Б. Таранчук

А.І. Таўгень

І.С. Ташлыкоў

А.Т. Федарук

У.У. Шлыкаў

М.Г. Ясавееў

## ФІЗІКА

Ташлыков И.С., Туровец А.И. Структура и свойства поверхности графита, облученного ионами ксенона ..... 3

Кисель В.В., Редьков В.М. Система тензорных уравнений для частицы со спином 2 и описание аномального магнитного момента ..... 8

Марголин Л.Н. Диэлектрические свойства кристаллов LAspTGS ..... 10

Добрянский В.М., Железнякова О.А., Федотова Ю.А., Касюк Ю.В., Лебедев С.А., Тарасевич Т.В. Мессбаузерская спектроскопия в системе  $\text{YFeSbEO}_x\text{F}_x$  ( $x = 0; 0,3$ ) ..... 14

## МАТЭМАТЫКА

Стэльмашук М.Т., Шылінец У.А., Андрэева Г.А. Аб краявай задачы для функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый ..... 17

Багдановіч С.А. Амаль гіперэрмітава структура другога роду тыпу  $(J, P_1, P_2)$  на датычным распластанні рыманавай мнагастайнасці ..... 19

Гойко В.И. Подалгебры конечномерных алгебр Ли ..... 22

Азеев С.М. Об экстензорных свойствах пучка орбит данного типа ..... 28

## МЕТОДЫКА ВЫКЛАДАННЯ

*Методыка выкладання фізікі* ..... 31

Якавенка С.У. Задачы па фізіцы як сродак фарміравання пазнавальнай самастойнасці навучэнцаў ..... 31

*Методыка выкладання матэматыкі* ..... 34

Килюшин И.В. Теоретическая интеграция математики и физики в курсе математического анализа ..... 34

Баровік Д.В., Таранчук В.Б. Численная реализация математической модели верховых лесных пожаров ..... 40

Ляховіч А.В. Фарміраванне ўменняў абагульняць шляхам паступовага пераўтварэння матэматычных задач ..... 44

УДК 519.87

**Д.В. Баровик**, аспирант кафедры

информационного и программно-математического  
обеспечения автоматизированных производств ФПМИ БГУ;

**В.Б. Таранчук**, доктор физико-математических наук,  
заведующий кафедрой информационного и программно-математического  
обеспечения автоматизированных производств ФПМИ БГУ

## ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЕРХОВЫХ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ

**Введение.** Интерес к математическим моделям лесных пожаров, которые разрабатываются с 1940-х до настоящего времени, обусловлен большим числом вопросов научного и практического характера. Есть определенные успехи, но при этом во многих научных публикациях отмечается, что остаются нерешенными ряд вопросов [1–4]: неполнота аналитического изучения соответствующих краевых задач и только ограниченное число полученных для предельно упрощенных условий эталонных решений; отсутствие общепринятого обоснования принимаемых в моделях математических описаний физико-химических реакций и превращений; необходимость разработки новых численных аппроксимаций, повышения быстродействия алгоритмов расчета по теоретическим моделям.

Современное состояние ИТ позволяет развивать и разрабатывать математические модели лесных пожаров, в которых учитываются процессы массообмена и тепловыделения, химических реакций и превращений при распространении зон горения, излучения, но такие модели требуют значительных вычислительных мощностей, их применение предполагает продолжительные расчеты даже на компьютерах с высоким быстродействием. Поэтому практическое использование математических моделей лесных пожаров в системах поддержки принятия решений возможно двумя способами: создавать экспертные системы со сформированными базами знаний по рассчитываемым прогнозным вариантам [5], создавать инженерные (эмпирические и полуэмпирические) модели.

В [4] отмечено, что наиболее значимой теоретической моделью распространения лесных пожаров является модель А.М. Гришина, которая базируется на фундаментальных законах физики, теоретически обоснована, частично подтверждена натурными экспериментами. Именно эта модель явилась основой при создании автором данной статьи компью-

терного комплекса по моделированию распространения вершинных верховых пожаров. В настоящей работе описываются уточнения модели А.М. Гришина, обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

При описании геометрии распространения лесных пожаров обычно выделяют в горизонтальном направлении: участок выжженной площади, зону горения, невыжженную площадь; в вертикальном разрезе: нижний ярус леса, полог леса, факел, приземный пограничный слой [3; 6–8]. Из физико-химических процессов при горении лесных горючих материалов (ЛГМ) определяющими являются следующие: прогрев, сушка, пиролиз ЛГМ, окисление газообразных, конденсированных и дисперсных продуктов пиролиза, выветривание частиц сажи из коксики, выветривание частиц пепла и образование дыма. Общая схема изменения агрегатного состояния и химического состава в зоне лесного пожара базируется на предположениях [3; 6]: изменение состояния и состава ЛГМ обуславливает «подвод» теплоты в результате конвекции, теплопроводности и излучения; при горении образуются и присутствуют в газодисперсном состоянииmonoоксид углерода ( $\text{CO}$ ), водород ( $\text{H}_2$ ), метан ( $\text{CH}_4$ ), углекислый газ ( $\text{CO}_2$ ), водяной пар ( $\text{H}_2\text{O}$ ), частицы сажи ( $\text{C}$ ); результат горения – в твердой фазе коксики, пепел и частицы дыма в газодисперсной фазе, частицы сажи в результате пиролиза и выветривания.

**О математической модели распространения верхового пожара.** Математическое моделирование распространения вершинного верхового пожара в лесном массиве выполняется с целью прогноза динамики процесса горения при задаваемых скорости ветра и температуре окружающей среды, геометрических, структурных и реакционных свойствах полога леса, температуре и размерах очага воспламенения в начальный момент времени.

В рассматриваемой ниже модели среда, в которой распространяется пожар, считается

пятифазной и включает: сухое органическое вещество, воду в жидкокапельном состоянии, коксик, золу и газовую фазу. Как и в других моделях, принято, что газовая фаза состоит из кислорода, горючих компонентов продуктов пиролиза, инертных компонентов воздуха, а также водяного пара и инертных продуктов горения; градиент температуры поперек полога леса мал по сравнению с градиентом температуры в продольном направлении; влияние силы Кориолиса не учитывается [6]. В настоящей работе изучается модель распространения верховых пожаров при дополнительных предположениях: давление считается постоянным; скорость ветра в пологе леса для одностороннего течения в основном зависит от параметров структуры лесного массива и принимается равной равновесной скорости  $u_\infty$ , вычисляемой по формуле (4.2.7) [6]; разности тепловых, диффузионных потоков на верхней и нижней границах полога леса определяются формулами Ньютона [6; 9]; приток тепла в полог леса вследствие излучения от факела пламени считается пренебрежимо малым. В принятой однотемпературной математической модели вершинного верхового пожара [10–11] определяющими являются:  $V$  – вектор равновесной скорости ветра,  $T_\infty$  – невозмущенная температура окружающей среды (в Кельвинах),  $c_{1\infty}$  и  $c_{2\infty}$  – массовые концентрации кислорода и горючих газов в невозмущенной атмосфере,  $\rho_\infty$  – невозмущенная плотность смеси газов (плотность воздуха),  $\lambda_T$ ,  $D_T$  – коэффициенты турбулентной теплопроводности и диффузии,  $\Delta h$  – высота крон деревьев, определяемая разницей высоты верхней и нижней границ полога леса;  $\alpha$  – коэффициент теплообмена между приземным слоем атмосферы и пологом леса,  $\alpha_c$  – коксовое число ЛГМ,  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана,  $M_c$  – молекулярная масса углерода,  $M_\infty$  – молекулярная масса (невозмущенная) воздуха;  $M_v$ ,  $v = 1, 2, 3$  – молекулярные массы компонентов газовой фазы;  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  – массовые скорости реакции пиролиза сухого органического вещества ЛГМ, испарения воды из ЛГМ (сушки), горения коксового остатка;  $R_{51}$ ,  $R_{52}$ ,  $Q$  – массовые скорости образования кислорода, горючих газов, газовой фазы;  $R_5$  – массовая скорость реакции горения (окисления) горючих газов,  $c_p$  и  $\rho_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  – теплоемкости и истинные плотности  $j$ -й фазы ( $j = 1$  соответствует сухому органическому веществу лесных горючих материалов,  $j = 2$  – связанной с ЛГМ воде в жидкокапельном состоянии,  $j = 3$  – коксику, конденсированному продукту пиролиза,  $j = 4$  – минеральной части

ЛГМ, золе);  $c_{p5}$  – теплоемкость газовой фазы;  $q_2$ ,  $q_3$  и  $q_5$  – тепловые эффекты процессов испарения, горения конденсированного горючего и газообразного горючего продукта пиролиза соответственно.

Система уравнений модели записана в [10–11], она преобразована к виду, который упрощает понимание применяемых разностных аппроксимаций; показано, где и какие нелинейности имеют место. В системе записаны уравнения для определения: температуры  $T$  (в Кельвинах); объемных долей многофазной реагирующей среды  $\varphi$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), плотности газовой фазы (смеси газов)  $\rho_5$ , массовых концентраций компонентов газовой фазы  $c_v$ , ( $v = 1, 2, 3$ ,  $c_1$  соответствует кислороду,  $c_2$  – горючим компонентам продуктов пиролиза,  $c_3$  – смеси инертных компонентов воздуха, водяного пара, инертных продуктов реакций пиролиза, горения коксики и окисления горючих газов).

**Об уточнении математической модели.** Для замыкания системы уравнений необходимо записать конкретные зависимости, описывающие скорости пиролиза, сушки ЛГМ, догорания коксики и химических реакций в газовой фазе. Согласно [6–7],

$$\begin{aligned} R_1 &= k_{01} \rho_1 \varphi_1 \exp\left(-\frac{E_1}{RT}\right), \quad R_2 = k_{02} T^{-1/2} \rho_2 \varphi_2 \exp\left(-\frac{E_2}{RT}\right), \\ R_3 &= k_{03} s_\sigma \varphi_3 \rho_5 c_1 \exp\left(-\frac{E_3}{RT}\right); \\ R_{51} &= -R_3 - \frac{R_5 M_1}{2M_2}, \quad R_{52} = (1 - \alpha_c) v_r R_1 - R_5, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k_{01}$ ,  $k_{02}$ ,  $k_{03}$  – предэкспоненты химических реакций [12],  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  – энергии активации химических реакций,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $s_\sigma$  – удельная поверхность конденсированного продукта пиролиза (коксики),  $v_r$  – доля газообразных горючих продуктов пиролиза ЛГМ. Важной компонентой математической модели является выражение скорости горения газообразных продуктов пиролиза ЛГМ  $R_5$ . В научной литературе по вопросу описания реакций нет единого подхода. Часто указывают [6–7; 12], что в качестве определяющей можно рассматривать только реакцию  $\text{CO} + 1/2 \cdot \text{O}_2 = \text{CO}_2 + 68 \text{ ккал/моль}$ , так как именно она вносит наибольший вклад в энергетику лесного пожара. Для описания скорости упомянутой реакции в [6] предлагаются заимствованные из различных источников два выражения. Они различаются. Возможность практического использования каждого из них вызывает сомнения, более того, анализ формулы (5.4.19) [6] указывает на несоответствие размерностей в соотношениях, описывающих

одну и ту же реакцию при различных концентрациях кислорода.

Адаптированная и применяемая авторами математическая модель [10–11] состоит из уравнений, начальных и граничных условий, а также уточненной зависимости для  $R_5$ . Если кислород находится в недостатке (недостаточно для полного выгорания всего монооксида углерода), описание реакции  $R_5$  предложенными в [6–7] формулами дает физически некорректный результат – при любых, в том числе и очень малых значениях  $c_1$ , скорость горения горючих газов и уничтожения кислорода может быть нереально высока. Анализ определяющих функций и получаемых решений дает основание использовать уточнение описания процесса горения монооксида углерода принятием принципа «избытка-недостатка»:

$$R_5 = \rho_5 \min(c_2, \frac{M_2}{2M_1} c_1) k_{co} \exp(-\frac{E_{co}}{RT}). \quad (2)$$

Для конкретного моделируемого лесного массива нужно уточнять истинную плотность сухого органического вещества  $\rho_1$ , определять значения плотности  $\rho_0$  типичного слоя ЛГМ и его влагосодержания  $W = (m - m_1) / m_1$ , где  $m$  и  $m_1$  – массы ЛГМ в естественном и абсолютно сухом состояниях. Значения начальных объемных долей вычисляются по формулам:  $\varphi_{1n} = \rho_0 / \rho_1$ ,  $\varphi_{3n} = 0$ , так как коксик на невыжженном участке еще не образовался,  $\varphi_{2n} = (1 - \zeta)W\rho_0 / \rho_2$ , где  $\zeta$  – зольность лесных горючих материалов [6], рядом авторов отмечено, что влияние учета зольности на моделируемые процессы мало, поэтому примем  $\varphi_4 = 0$ . В предположении, что на выжженном участке ЛГМ полностью сгорели, соотношения для конечных объемных долей можно описать формулами:  $\varphi_{1k} = 0$ ,  $\varphi_{2k} = 0$ ,  $\varphi_{3k} = a_c \varphi_{1n} \rho_1 / \rho_3$ .

**Начальные и граничные условия** задаются по аналогии с [6] следующим образом:

$$T|_{t=0} = T_0(P), \quad T(\pm\infty) = T_\infty; \quad (3)$$

$$c_1|_{t=0} = c_{10}(P), \quad c_1(\pm\infty) = c_{1\infty}; \quad (4)$$

$$c_2|_{t=0} = c_{20}(P), \quad c_2(\pm\infty) = c_{2\infty}; \quad (5)$$

$$c_3|_{t=0} = 1 - c_{10}(P) - c_{20}(P), \quad c_3(\pm\infty) = 1 - c_{1\infty} - c_{2\infty}; \quad (5)$$

$$\varphi_j|_{t=0} = \varphi_{j0}(P), \quad \varphi_j(-\infty) = \varphi_{jk}, \quad (6)$$

$$\varphi_j(+\infty) = \varphi_{jh}, \quad j = 1, 2, 3; \quad \varphi_4|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

Здесь  $P$  – область пожара,  $-\infty$  и  $+\infty$  обозначают удаленные на определенное расстояние от зоны горения выжженную и невыжженную

области соответственно, где окружающая среда характеризуется невозмущенными значениями  $c_{1\infty}$  и  $c_{2\infty}$  и  $T_\infty$ . Соображения о характере протекания реакций, фазовых переходов, физико-химических превращений в неожженной процессами пожара части леса диктуют необходимость добавления условий:  $R_1 = 0$ ,  $R_2 = 0$ ,  $R_3 = 0$ ,  $R_5 = 0$  при  $T_\infty \leq T \leq T_*$ , где  $T_*$  – задаваемое значение температуры. Таким образом, учитываемые в модели процессы не происходят, пока не произошел прогрев до определенного уровня.

**Численная модель.** Сформулированная выше краевая задача решалась численно с использованием конечно-разностных аппроксимаций. Подробное описание примененной явной конечно-разностной схемы, ее методическое обоснование, как осуществляется контроль устойчивости и некоторые результаты расчетов приведены в [11].

**Примеры моделирования распространения пожара в неоднородных лесных массивах.** С использованием разработанного компьютерного комплекса решен ряд задач, имеющих практическое значение. В частности, моделируются и анализируются процессы распространения вершинного верхового пожара в лесном массиве, характеристики которого по площади переменны, схема фронта огня соответствует приближению двумерной геометрии в горизонтальной плоскости. Приведем результаты прогноза развития пожара в массиве, когда на площади присутствуют лесопожарные разрывы и заслоны [6]. Принято, что в лесном массиве есть неоднородное включение прямоугольной формы, внутри и вне включения характеристики ЛГМ постоянны, но разные. Приведенные результаты расчетов получены для случая, когда размеры прямоугольника – ширина 10 м, длина – 30 м. Ширина выбрана достаточной для того, чтобы фронт верхового пожара в принятых условиях не смог преодолеть лесопожарный разрыв (неоднородное включение). В рассматриваемом случае пожар тухнет из-за того, что в направлении его движения отсутствуют лесные горючие материалы, что может быть подтверждено расчетами соответствующей задачи в одномерном случае. В подобных случаях фронт пожара разрывается на два независимых участка. Представляют интерес следующие вопросы: при каких условиях два горящих участка леса снова сомкнутся в один после «огибания» поляны; какую геометрию примет сомкнувшийся фронт? Вернется ли через продолжительное время фронт в исходное плоское состояние (прямую линию),

или «вырвавшийся вперед» изгиб границы пожара будет распространяться быстрее? При каких условиях фронт не сможет заново сомкнуться и далее по направлению ветра будут распространяться два независимых «языка» фронта? Когда наличие поляны приведет к тому, что после разрыва два фронта будут затухать по краям, постепенно укорачиваясь и приводя к прекращению пожара в целом?

Для ответа на поставленные вопросы была проведена серия вычислительных экспериментов. Изучался процесс пожара в еловом лесу, когда фронт пожара представляет собой «стену огня», распространяющуюся по направлению ветра (рисунки 1–2). На левой и правой границах лесного массива приняты «мягкие» граничные условия, на верхней и нижней границе – условия симметрии, задаются:  $u_\infty = 5 \text{ м/с}$ ,  $\rho_0 = 0.2 \text{ кг/м}^3$ ,  $\Delta h = 15 \text{ м}$ ,  $T_\infty = 300 \text{ К}$ ,  $\rho_1 = 700 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_3 = 200 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_4 = 200 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_\infty = 1.15 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_{1\infty} = 0.23$ ,  $c_{2\infty} = 0$ ,  $M_1 = 32$ ,  $M_2 = 28$ ,  $M_3 = 29$ ,  $M_C = 12$ ,  $M_\infty = 29$ ,  $c_{p1} = 2000 \text{ Дж/(кг·К)}$ ,  $c_{p2} = 4180 \text{ Дж/(кг·К)}$ ,  $c_{p3} = 900 \text{ Дж/(кг·К)}$ ,  $c_{p4} = 1000 \text{ Дж/(кг·К)}$ ,  $c_{p5} = 1000 \text{ Дж/(кг·К)}$ ,  $q_2 = 3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ ,  $q_3 = 1.2 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}$ ,  $q_5 = 10^7 \text{ Дж/кг}$ ,  $\lambda_T = 5 \cdot 10^3 \text{ Дж/(м·с·К)}$ ,  $D_T = 5 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\alpha = 1000 \text{ Вт/(м}^2\text{·К)}$ ,  $\alpha_c = 0.1$ ,  $v_F = 0.8$ ,  $\kappa_R = 0.1 \text{ м}^{-1}$ ,  $s_\sigma = 1000 \text{ м}^{-1}$ ,  $E_1/R = 9400 \text{ К}$ ,  $E_2/R = 6000 \text{ К}$ ,  $E_3/R = 10000 \text{ К}$ ,  $k_{01} = 3.63 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ,  $k_{02} = 6 \cdot 10^5 \text{ К}^{0.5} \text{ с}^{-1}$ ,  $k_{03} = 1000 \cdot \text{с}^{-1}$ .

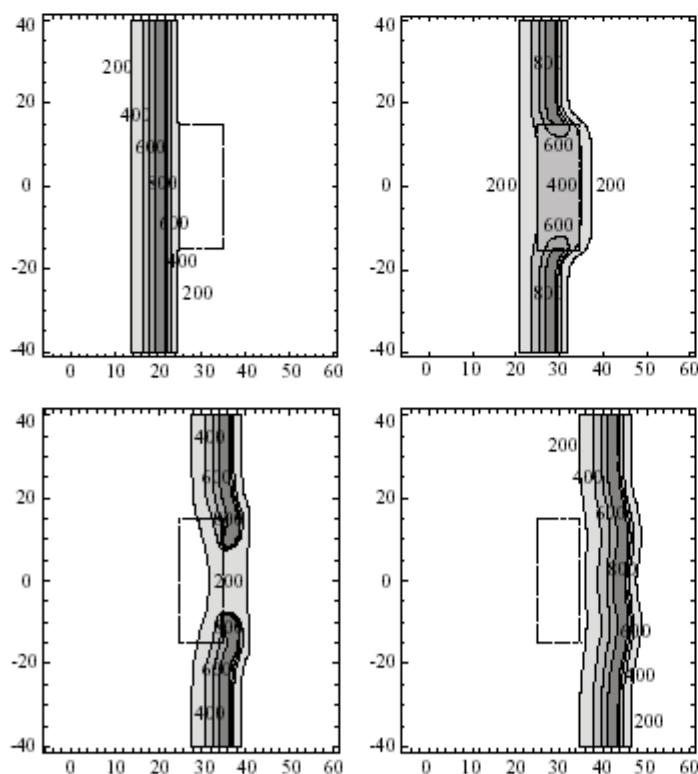


Рисунок 1 – Огибание лесопожарного разрыва фронтом пожара в случае влагосодержания 55 %. Показаны изолинии распределения температуры в моменты времени 5; 7; 9 и 11 с.

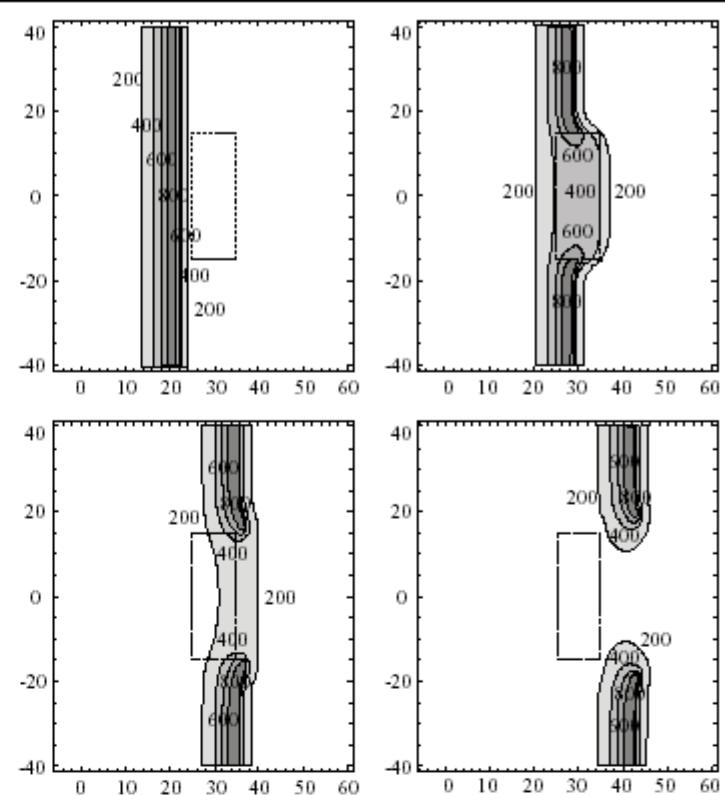


Рисунок 2 – Разрыв фронта пожара при обтекании лесопожарного разрыва (влагосодержание ЛГМ 60 %). Показаны изолинии распределения температуры в моменты времени 5; 7; 9 и 11 с.

Несколько полученных численных решений иллюстрируются на рисунках 1–2 картами плотностей и изолиниями. Показано, что возможны два варианта динамики границы пожара: он может удлиняться, укорачиваться (затухать). В первом случае, после прохождения через площадь поляны, оба конца фронта снова сливаются в единую полосу (рисунок 1), во втором – движутся независимо друг от друга, постепенно затухая по краям. Расчеты показали, что существует «скаккообразное переключение» между этими двумя режимами при плавном изменении некоторых параметров задачи, в частности влагосодержания ЛГМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Collinson, A.S. Introduction to World Vegetation / A.S. Collinson. – Second Edition. – New York : Springer, 1988. – 325 p.
2. Goldammer, J. Wildland Fire Management Handbook for Sub-Saharan Africa / J. Goldammer, C. Ronde. – Global Fire Monitoring Center, 2004. – 432 p.
3. Гришин, А.М. Общие математические модели лесных и торфяных пожаров и их приложения / А.М. Гришин // Успехи механики. – 2002. – № 4. – С. 41–89.
4. Mathematical models and calculation systems for the study of wildland fire behaviour / E. Pastor et al. // Progress in Energy and Combustion Science. – 2003. – Vol. 29. – P. 139–153.
5. Barovik, D.V. Technological aspects of creation and maintenance in system mathematica of the knowledge base of forest fire models / D.V. Barovik, V.B. Taranchuk // Computer Algebra Systems in Teaching and Research : The Fifth International

- Workshop CASTR, Siedlce, Poland, 2009. / University of Podlacie. – Siedlce, 2009. – Vol. Mathematical Modeling and Mathematical Physics. – P. 7–16.
6. Гришин, А.М. Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними / А.М. Гришин. – Новосибирск: Наука, 1992. – 408 с.
7. Кулешов, А.А. Математическое моделирование в задачах промышленной безопасности и экологии / А.А. Кулешов // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2003. – № 4. – С. 56–70.
8. Fire spread experiment across mediterranean shrub: Influence of wind on flame front properties / F. Morandini et al. // Fire Safety Journal. – 2006. – Vol. 41, № 3. – P. 229–235.
9. Померанцев, В.В. Основы практической теории горения / В.В. Померанцев. – Л. : Энергоатомиздат, 1986. – 312 с.
10. Баровик, Д.В. Об особенностях адаптации математических моделей вершинных верховых лесных пожаров / Д.В. Баровик, В.Б. Таранчук // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2010. – № 1. – С. 138–143.
11. Barovik, D.V. Mathematical Modelling of Running Crown Forest Fires / D.V. Barovik, V.B. Taranchuk // Mathematical Modelling and Analysis. – 2010. – Vol. 15, № 2.
12. Зельдович, Я.Б. Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович. – М.: Наука, 1980. – 478 с.

#### SUMMARY

*The adaptation of Grishin's forest fire mathematical model for a case of the crown fire is described. The numerical experiment results are discussed.*

Поступила в редакцию 01.04.2010 г.