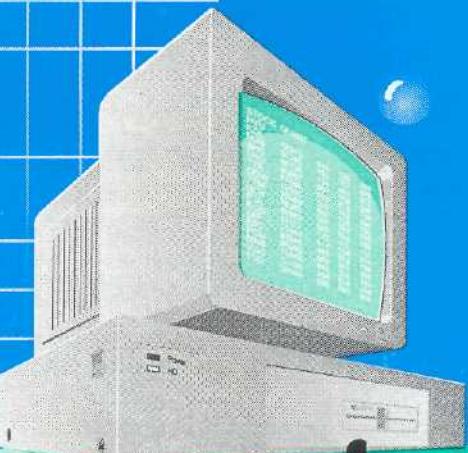


Информатизация образования

1

2007



Учредитель –

Учреждение «Главный
информационно-
аналитический центр
Министерства образования
Республики Беларусь»

Свидетельство о регистрации
№437
выдано 11.12.2001 г.
Министерством информации
Республики Беларусь



220088, г. Минск,
ул. Захарова, 59

<http://www.giac.unibel.by>

**Ежеквартальный
научно-методический журнал**

(приказом ВАК РБ от 18 января 2006 г.
№ 8 включен в список научных изда-
ний Республики Беларусь для опубли-
кования результатов диссертационных
исследований)

1(46) 2007

Информатизация образования

Издается с IV квартала 1995 года

Редакционный совет

Н.И. Листопад (главный редактор)
А.Н. Курбацкий (предс. ред. совета)
С.И. Ладутько (зам. гл. редактора)
Е.Н. Кишкурно (отв. секретарь)
М.М. Ковалев
В.Н. Ярмолик
М.К. Буза
А.Н. Морозевич
Б.Н. Паньшин
О.И. Тавгень
И.Ф. Киринович
В.В. Басъко
М.Г. Зеков
В.И. Дравица
С.В. Енин
Д.И. Пунько
С.Г. Ершова

САММИТ ТЕХНОЛОДЖИЗ

САММИТ-Сертифицированные
САММИТ-Производство и продукция

САММИТ-Производство компьютеров

САММИТ SUMMIT SYSTEMS®

САММИТ-Мощные многопроцессорные

САММИТ-Компьютерные классы сервера

САММИТ-Сети: разработка и установка

САММИТ-3 года гарантии

САММИТ-Сервисная поддержка и
гарантийное обслуживание

САММИТ-на всей территории Беларуси
-15 лет на рынке компьютеров

-Прямые связи с поставщиками:

INTEL, Microsoft, ViewSonic, AOC,

ASUS, GIGABYTE, Acorp, Fujitsu...

Компьютерный класс- из классных компьютеров!

Материнские платы Acorp, ASUSTeK, Giga-byte
Видеостандарт AGP

CPU Intel Pentium, Celeron, AMD, IBM

Мониторы ViewSonic, AOC от 15" до 29"

любая конфигурация компьютера под заказ

CD R-W Drive, PD Drive, CD-Writer

модернизация, ремонт любых компьютеров, мониторов

выезд специалиста для консультации к Заказчику

ОС, СУБД, CASE-инструментарий

консалтинг и информационная поддержка

ИП «САММИТ ТЕХНОЛОДЖИЗ»

Минск, ул. Я. Коласа 3, 3 этаж

(017) 237-35-70, 237-35-71, 237-35-72

E-mail: summit@summit.by

www.summit.by

Сервисный центр: тел./факс (017) 234-27-72

Региональные сервисные представители:

г. Брест: (0162) 46-02-83

г. Витебск: (0212) 36-09-53, 36-52-54

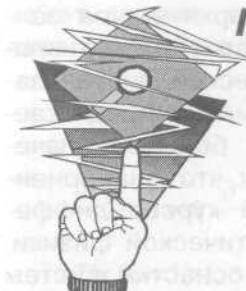
г. Гомель: (0232) 47-47-50

г. Гродно: (0152) 47-36-36

г. Могилев: (0222) 25-03-26, 32-70-28



ПРОГРАММНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА



С.Н. Иванов, аспирант Белорусского го-
сударственного университета;

В.Б. Таранчук, д.ф.-м.н., профессор, заве-
дующий кафедрой информационного и
программно-математического обеспечения
автоматизированных производств Бело-
русского государственного университета

Интерактивный пакет для построения в системе MATHEMATICA аналитических решений задач тепломассопереноса

В учебных программах специальностей прикладная ма-
тематика, математика, информатика, механика, физика и
ряда технических специальностей значительная роль отво-
дится дисциплинам, связанным с математическим модели-
рованием. Качественно новый уровень обучения достигает-
ся тогда, когда студентам предоставляются конкретные си-
стемы математического моделирования, инструментарий
вычислительного эксперимента, а на практических занятиях
возможности приложений расширяются самими обучаемы-
ми добавлением программного функционала и сервиса. В
предлагаемой работе излагаются методика, архитектура и
особенности создания пакета программ, являющегося со-
ставной частью обучающего компьютерного комплекса ма-
тематического и программного обеспечения для контроля
и прогноза распространения водорастворимых соединений

в почвогрунтах. Описаны особенности и архитектура запрограммированного в системе **Mathematica** интерактивного приложения для построения и графической визуализации эталонных аналитических решений. Именно предлагаемая часть программного комплекса имеет большое значение в образовательных процессах, потому что она ориентирована на закрепление базовых знаний курсов дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, физики, механики и является примером оснастки систем для вычислительного эксперимента.

В работе описаны методика формирования унифицированного ряда точных и приближенных аналитических решений, их получения, графической и табличной визуализации; инструментарий, архитектура, особенности реализации и программирования пакета интеллектуальных модулей **MonSol_HTM1**, разработанного с использованием компьютерной технической системы (КТС) **Mathematica**. Пакет обеспечивает построение, анализ и мониторинг аналитических решений уравнения теплопроводности при различных начальных и граничных условиях, содержит предметную базу знаний, средства обучения конечного пользователя.

Прямые задачи теории тепло- и массопереноса сводятся к интегрированию дифференциальных уравнений с частными производными при определенных начальных и граничных условиях. Наиболее типично для теории тепло- и массопереноса уравнение, которое в математической физике известно как уравнение теплопроводности. Основными определяющими коэффициентами для этого уравнения являются: удельная теплоемкость, плотность материала, коэффициент теплопроводности. Решения уравнения теплопроводности при различных начальных и граничных условиях для наиболее типичных задач даны в справочнике А.В. Лыкова [1]. Но на данный момент нет электронного банка аналитических решений, универсального механизма их получения.

Средствами пакета **MonSol_HTM1** могут быть получены в символьном виде и/или иллюстрированы графиками решения типичных задач тепло- и массопереноса в почвогрунтах, в том числе задачи промерзания влажного грунта с учетом его деформации [2]. Примером математического описания

может служить следующая унифицированная постановка задачи и ее обобщенное аналитическое решение:

$$\frac{\partial T^*(x, \tau)}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 T^*(x, \tau)}{\partial x^2}, (\tau > 0, 0 < x < \xi), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, (\tau > 0, \xi < x < \infty), \quad (2)$$

$$T(x, 0) = f(x), \quad (3)$$

$$\gamma \cdot H \cdot T(0, \tau) - \eta \cdot \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = H \cdot T_C, \quad (4)$$

$$T(\infty, \tau) = T_0, \quad \frac{\partial T(\infty, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

для $\xi=0$

$$T(x, \tau) = (1 - \gamma) \cdot \left[T_0 + 2 \cdot H \cdot T_C \cdot \sqrt{a \cdot \tau} \cdot ierfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}}\right) \right] + \quad (6)$$

$$+ \gamma \cdot \eta \cdot \left[T_0 + (T_C - T_0) \cdot \left[erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}}\right) - e^{Hx + H^2 a \cdot \tau} \cdot erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}} + H \cdot \sqrt{a \cdot \tau}\right) \right] \right] + \\ + \gamma \cdot (1 - \eta) \cdot \left[T_C + \frac{1}{2\sqrt{\pi \cdot a \cdot \tau}} \int_0^\infty (f(\epsilon) - T_C) \cdot (e^{-\frac{(x-\epsilon)^2}{4a\tau}} - e^{-\frac{(x+\epsilon)^2}{4a\tau}}) d\epsilon \right].$$

При значениях $\xi=0$, $\gamma=1$, $\eta=0$ уравнение (1) следует исключить из постановки (1)-(5). Имеем задачу с граничными условиями первого рода, известное [1] решение которой записывается:

$$T(x, \tau) = T_C + \frac{1}{2\sqrt{\pi \cdot a \cdot \tau}} \int_0^\infty (f(\epsilon) - T_C) \cdot (e^{-\frac{(x-\epsilon)^2}{4a\tau}} - e^{-\frac{(x+\epsilon)^2}{4a\tau}}) d\epsilon. \quad (7)$$

Если заданы $\xi=0$, $\gamma=0$, $\eta=1$ и $f(x)=T_0$, получаем задачу с граничными условиями второго рода, известное [1] решение которой записывается:

$$T(x, \tau) = T_0 + 2 \cdot H \cdot T_C \cdot \sqrt{a \cdot \tau} \cdot ierfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}}\right). \quad (8)$$

При значениях $\xi=0$, $\gamma=1$, $\eta=1$ получаем задачу с граничными условиями третьего рода, известное [1] решение которой записывается:

$$T(x, \tau) = T_0 + (T_C - T_0) \cdot \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}} \right) - e^{Hx + H^2 a \cdot \tau} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}} + H \cdot \sqrt{a \cdot \tau} \right) \right]. \quad (9)$$

Для $\xi \neq 0$, $\gamma=1$, $\eta=0$ и $f(x)=T_0$ и с дополнительными условиями

$$T^*(\xi, \tau) = T(\xi, \tau) = T_3 = \text{const},$$

$$\lambda \cdot \frac{\partial T^*(\xi, \tau)}{\partial x} - \lambda \cdot \frac{\partial T(\xi, \tau)}{\partial x} = Q \cdot W \cdot p \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \tau}, \quad (10)$$

$$\xi = \beta \cdot \sqrt{\tau}$$

системой уравнений (1)-(5) может быть описан процесс промерзания/оттаивания влажного грунта [2]. Примером аналитического решения задачи (1)-(5), (10) является:

$$T(x, \tau) = \begin{cases} T_C + (T_3 - T_C) \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}} \right) / \operatorname{erf} \left(\frac{\beta}{2\sqrt{a}} \right), & x \leq \beta \cdot \sqrt{\tau}, \\ T_0 - (T_0 - T_3) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}} \right) / \operatorname{erfc} \left(\frac{\beta}{2\sqrt{a}} \right), & x > \beta \cdot \sqrt{\tau}, \end{cases} \quad (11)$$

где β находится из решения уравнения

$$\frac{\lambda \cdot (T_3 - T_C)}{\sqrt{a} \cdot \operatorname{erf}(\beta / 2\sqrt{a})} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{4a}} - \frac{\lambda \cdot (T_0 - T_3)}{\sqrt{a} \cdot \operatorname{erfc}(\beta / 2\sqrt{a})} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{4a}} = \frac{Q \cdot W \cdot p \cdot \sqrt{\pi}}{2} \beta. \quad (12)$$

Построение и анализ решений перечисленных задач обязательны при изучении качественных характеристик изучаемых процессов и являются эталонами для приближенных решений в комплексах численного моделирования. Необходимыми составляющими вычислительного эксперимента являются графическая визуализация, создание и сопровождение базы знаний получаемых результатов. В пакете **MonSol_HTM1** для реализации перечисленного выбрана именно КТС **Mathematica**, которая, как и другие компьютерные системы, поддерживает Windows-подобный интерфейс, содержит средства программирования специальных алгоритмов и инструменты создания интерактивных диалогов.

Формируемые с помощью пакета аналитические решения сгруппированы в классы по типу граничных условий и наличию фазовых переходов. Решения включают интегралы от функций начального распределения и граничных условий. Как правило, решения в пакете представляются суммами функциональных рядов или специальными функциями ([3]). Такой формат позволяет получать аналитические решения рассматриваемых классов задач для любых начальных и граничных условий, лишь заменяя соответствующие функции в обобщенной форме решения. Сложные преобразования и выводы формул выполняются в пакете и реализованы функциями ядра КТС, что освобождает пользователя от громоздких вычислений, появления случайных ошибок при выводе формул.

Пакет **MonSol_HTM1** предоставляет пользователю удобный интерфейс с меню, панелями настроек параметров, информационными окнами, окнами рабочих и гипертекстовых документов (рис. 1). Информационные окна содержат поля с условными обозначениями и таймером. Все модули пакета имеют интуитивно понятный интерфейс, который не требует от пользователя дополнительных навыков работы с электронными документами.

Структуру пакета можно представить в виде взаимосвязанных блоков (рис. 2). Главное меню обеспечивает удобный доступ ко всем компонентам пакета. Панель настроек параметров включает в себя: панель изменения параметров уравнения теплопроводности и граничных условий, панель управления дискретами расчетов, панель управления графической визуализацией.

Из базы знаний пользователю предоставляются для каждой задачи: краткое пояснение с описанием физического смысла возможных граничных условий, постановка задачи и обобщенное аналитическое решение в традиционной математической нотации.

Расчет требуемого решения, его графическая визуализация, включающая иллюстрацию динамики процесса распространения тепла и влаги, могут быть получены нажатием соответствующей кнопки в рабочем документе. Начальное распределение в области определения решения может задаваться как постоянное и в виде функции от координаты.

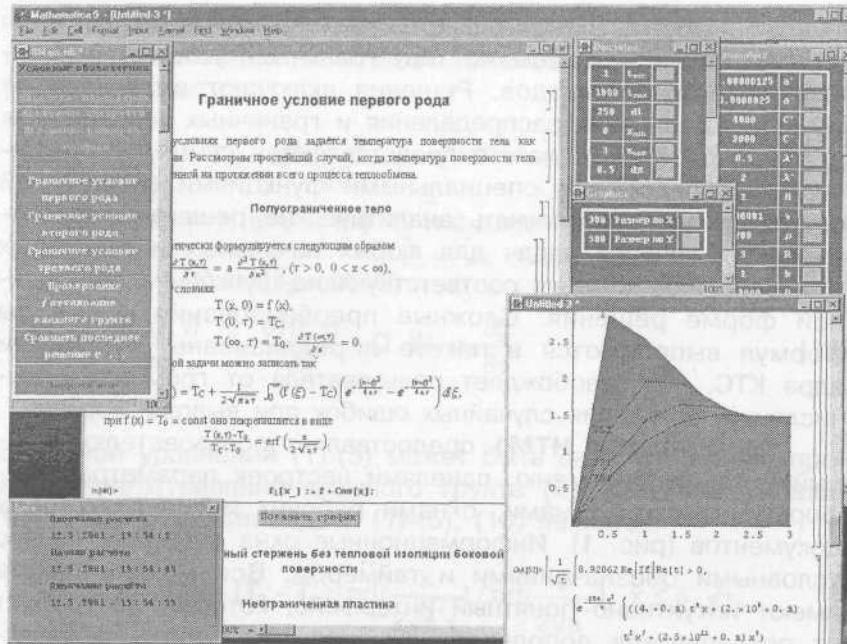


Рис. 1. Пример интерфейса системы, основные панели и окна

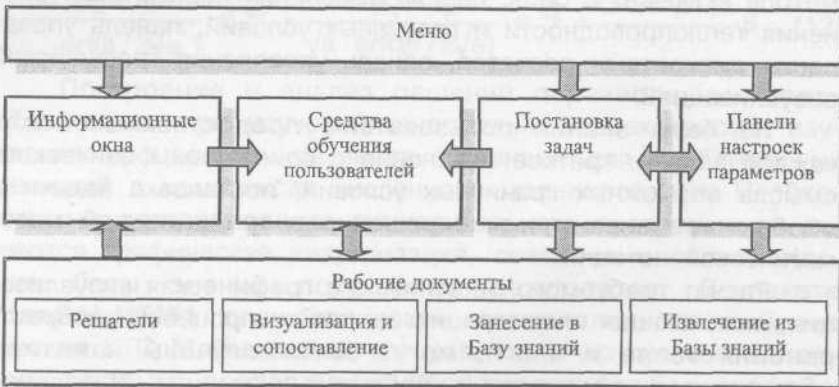


Рис. 2. Структурная схема интерфейсной оболочки пакета

Причем в таких случаях функция записывается в виде максимально близком к тому, как она представлена в математической литературе. Например, начальное распределение для полуограниченного тела в пакете определяется так

$f[x] := 2 + 1 / \text{Cos}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{x}{R}\right] e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$. Потоки на границах также могут задаваться постоянными или функциями времени, например: $q[\tau] := 1 - \frac{2}{(\pi n)^2} \text{Sin}\left[\frac{\pi n \tau}{R}\right]$.

При программировании пакета были использованы имеющиеся в КТС стандартные для языков программирования операторы **For**, **If**, **While**, **Evaluate**; при работе с файлами – функции **InputString**, **Put**, со списками и матрицами – **Table**, а также следующие встроенные функции системы **Mathematica**, которые условно можно разделить на группы:

1) решение уравнений и систем уравнений

FindRoot [$\text{lhs} == \text{rhs}$, $\{x, x_0\}$] – находит численное решение уравнения $\text{lhs} == \text{rhs}$, если для переменной x выбрано начальное приближение x_0 ;

Solve [eqns , vars , elims] – решает уравнения eqns по переменным vars , исключая переменные elims ;

Nsolve [eqns , vars , elims] – возвращает численное решение уравнения eqns относительно переменных vars , исключая переменные elims ; с этой функцией используется единственная опция **WorkingPrecision**, задающая число верных цифр результата;

NDSolve [eqns , $\{y_1, y_2, \dots\}$, $\{x, \text{xmin}, \text{xmax}\}$] – дает решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений eqns относительно функций y_1, y_2, \dots независимой переменной x в интервале от xmin до xmax ; первый аргумент (список) включает как сами дифференциальные уравнения, так и начальные условия; результатом вычисления является интерполирующая функция, с помощью которой можно найти значения приближенного решения в любой точке указанного интервала.

2) алгебраические преобразования

Simplify [expr] приводит выражение expr к простейшей форме;

ReplaceAll [expr /. rules] – применяет правило или набор правил rules для преобразования каждой части выражения expr.

3) графика

Plot [{f₁, f₂, ...}, {x, xmin, xmax}, optns] – предназначена для построения графиков функций y = f₁(x), y = f₂(x), ... при изменении независимой переменной x в пределах от xmin до xmax; при этом используется прямоугольная (декартова) система координат; необязательные аргументы optns (опции), общие и для других графических функций, служат для настройки вида графиков; если опции не указаны, то их стандартные значения устанавливаются автоматически;

ListPlot [lst, optns] – предназначена для построения графика по точкам. В общем случае аргумент lst представлен списком {{x₁, y₁}, {x₂, y₂}, ...}, где (x₁, y₁), (x₂, y₂), ... – координаты отмечаемых точек; если требуется соединять точки на графике отрезками прямых, то нужно установить дополнительную опцию *PlotJoined* → *True*; для управления размером точек используется директива *PointSize*, а не *Thickness*, как для линий;

GraphicsArray [lst] – позволяет разместить в одном графическом окне на экране сразу несколько графиков, которые можно расположить в одну строку или в виде таблицы; здесь lst – линейный или двухуровневый список, который группирует графические объекты;

Show [{plot₁, plot₂, ...}, optns] – совмещает в одном графическом окне несколько графиков; функция полезна в тех случаях, когда желательно, не вычисляя заново исходные графики plot₁, plot₂, ..., просмотреть их при иных настройках опций optns или сопоставить.

4) управление рабочими тетрадями

NotebookCreate [] – создает и отображает на экране новую рабочую тетрадь;

NotebookWrite [notebook, data] – записывает данные data в заданную рабочую тетрадь notebook.

Примером построения в пакете **MonSol_HTM1** решения для упомянутой выше задачи промерзания/оттаивания влажного грунта (1)-(5), (10)-(12) служит следующая конструкция:

а) строим обобщенную функцию для решения

$$T[x, \tau, a_1, a_2, \beta, T_B, T_0, T_C] := \\ \text{If}[x \leq \beta \sqrt{\tau}, T_C + (T_B - T_C) \operatorname{Erf}\left[\frac{x}{2 \sqrt{a_1 \tau}}\right] / \operatorname{Erf}\left[\frac{\beta}{2 \sqrt{a_1}}\right], \\ T_0 - (T_0 - T_B) \operatorname{Erfc}\left[\frac{x}{2 \sqrt{a_2 \tau}}\right] / \operatorname{Erfc}\left[\frac{\beta}{2 \sqrt{a_2}}\right]]$$

б) находим значение для β при помощи встроенной функции **FindRoot**

$$\beta = \beta /. \text{FindRoot}\left[\frac{\lambda_1 (T_B - T_C)}{\sqrt{a_1} \operatorname{Erf}\left[\frac{\beta}{2 \sqrt{a_1}}\right]} \operatorname{Exp}\left[\frac{\beta^2}{4 a_1}\right] - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_2 (T_0 - T_B)}{\sqrt{a_2} \operatorname{Erfc}\left[\frac{\beta}{2 \sqrt{a_2}}\right]} \operatorname{Exp}\left[\frac{\beta^2}{4 a_2}\right] == \frac{Q \cdot \rho \sqrt{\pi}}{2} \beta, \{\beta, 0.02\}\right]$$

в) для одного из полученных значений β=0.01989 решение будет записано

$$\text{If}[x \leq 0.01989 \sqrt{\tau}, -3 + 8.735 \operatorname{Erf}\left[\frac{15.811 x}{\sqrt{\tau}}\right], \\ 5 - 9.444 \operatorname{Erfc}\left[\frac{22.361 x}{\sqrt{\tau}}\right]]$$

Трудная, математически емкая часть работы – формирование точных или приближенных аналитических решений. Но не менее важной частью является визуализация этих решений и представление их в виде, иллюстрирующем качественные особенности и одновременно дающим количественные характеристики. Например, по полученным пакетом **MonSol_HTM1** решениям на экран выводятся графики распределения температуры в любой заданный момент времени [4], или в графическом окне показывается эволюция решений с отображением профилей температуры через заданные пользователем дискреты времени (на выбранном временном промежутке с указанным шагом). После отображения графика выводится само аналитическое решение, преобразованное с учетом формы начального распределения, потока на границе и параметров задачи.

Подсистема пакета по настройке параметров расчета и отображения результатов обеспечивает пользователя удобными инструментами задания определяющих функций уравнений и точек, в которых предполагается осуществить вывод решения (по координате, по времени). Причем, при первоначальной загрузке пакета параметры уже проинициализированы некоторыми значениями по умолчанию. Также в пакете выполняется проверка корректности вводимых значений параметров на физическую непротиворечивость (условия хранятся в базе знаний в виде соответствующих регламентных диапазонов). Способ преобразования и упрощения обобщенного аналитического решения зависит от конкретного типа задачи и определяется параметрами уравнений – в пакете запрограммированы основные варианты.

При использовании пакета в учебном процессе важной составляющей является предложенный и реализованный в нем механизм сопоставления получаемых аналитических решений одной и той же задачи для различных параметров. На приведенном рисунке (рис. 3) сопоставляются графики зависимости температуры от координаты, решения (7) на различные моменты времени. Начальное распределение за-

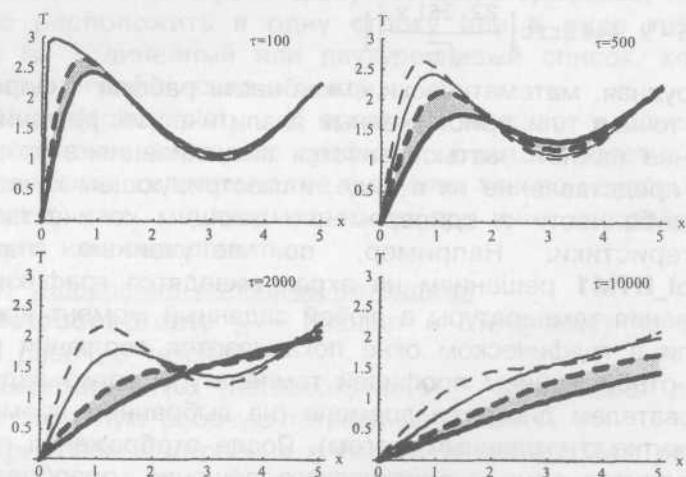


Рис. 3. Пример сравнения решений при различном значении коэффициента температуропроводности

дано функцией $f(x)=2+\cos(x)$, температура на границе $T_C=0$. Пунктирными линиями показаны графики решения для $a=0.0005$, сплошными – $a=0.001$. Линии удвоенной толщины иллюстрируют графики решений для текущего, тонкие – для предыдущего момента времени.

Все получаемые пользователем результаты могут быть сохранены как таблицы в виде текстового файла, так и в виде блокнотов КТС **Mathematica** и использованы в будущем для отображения или сравнения с другими решениями.

Литература

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 501 с.
2. Бровка Г.П. Тепло- и массоперенос в природных дисперсных системах при промерзании. – Мин.: Наука и техника, 1991. – 191 с.
3. Морозов А.А., Таранчук В.Б. Программирование задач численного анализа в системе Mathematica: Учеб. пособие. – Мин.: БГПУ, 2005. – 145 с.
4. Иванов С.Н., Таранчук В.Б. Компьютерная математика и представление аналитических решений задач тепломассопереноса. // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры. (DE&CAS'2005)=Differential equations and computer algebra systems (DE&CAS'2005): Материалы Междунар. конф. – Мин.: БГПУ, 2005. – С. 297-300.