УДК 519.24 (075.8)

Труш, Н. Н. Статистический анализ оценок спектральных плотностей устойчивых случайных процессов / Н. Н. Труш, Т. В. Соболева. – Минск : БГУ, 2008. – 68 с.: ил. – ISBN 978-985-485-993-4.

В монографии изложены основные понятия, определяющие устойчивые стационарные случайные процессы и их спектральное представление. Модифицированное конечное преобразование Фурье и модифицированная периодограмма вводятся как вспомогательные статистики для построения оценок спектральных плотностей устойчивых стационарных случайных процессов. Исследуются их статистические свойства. Строятся оценки спектральных плотностей рассматриваемых процессов и доказывается их состоятельность в смысле сходимости по вероятности.

Предназначено для студентов, аспирантов и научных сотрудников, специализирующихся в прикладной математике, информатике, физике, а также для специалистов, работающих в сфере экономики и финансов.

Ил. 7. Библиогр.: 27 назв.

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *М. А. Маталыцкий*;
кандидат физико-математических наук *С. Л. Чехменок*

ISBN 978-985-485-993-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы наблюдается расширение сфер применения методов статистического анализа временных рядов. Это связано с появлением новых прикладных задач в различных направлениях деятельности человека: финансах, медицине, экономике, биологии и многих других.

Одним из источников важной информации о структуре изучаемого явления и необходимым фактором при решении практических задач являются состоятельные оценки спектральных характеристик временных рядов. Их построение по конечной реализации представляет собой основную задачу в статистическом спектральном анализе временных рядов, последний при этом рассматривается на основе теории стационарных случайных процессов и однородных случайных полей. Среди авторов работ, посвященных данной теории, наиболее известны следующие: Э. Хеннан, Дж. Бокс и Дж. Дженкинс, Ю. Грибанов и В. Мальков, Т. Андерсон, Д. Бриллинджер, И. Журбенко, Н. Труш, М. Ядренко, А. Яглом, Дж. Бендат и А. Пирсол, А. Иванов и Н. Леоненко, С. Марпл-мл. и многие другие.

В настоящее время уделяется большое внимание спектральному анализу устойчивых стационарных случайных процессов и однородных случайных полей, особенностью которых является отсутствие моментов второго, а иногда и первого порядков. В этой связи не представляется возможным непосредственно применить традиционные методы спектрального анализа, а приходится разрабатывать новые подходы и методы для исследования таких процессов и полей.

Основы теории устойчивых распределений были заложены в 1920 году П. Леви. Отсутствие явных выражений для плотностей и функций распределения устойчивых распределений (за исключением гауссовского, Коши и Леви) до последнего времени являлось основным препятствием при использовании практиками устойчивых распределений. Однако в настоящее

ГЛАВА 3

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ПЕРИОДОГРАММА И ЕЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Пусть $X(t)$, $t \in Z$, – комплекснозначный симметричный α-устойчивый стационарный случайный процесс с дискретным временем и (2.1.1) – наблюдения за этим процессом.

Введем следующие обозначения:

$$D_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos xt)|t|^{-p-1}\,dt, \tag{3.1}$$

$$F_{p,\alpha}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1-e^{-x|t|^{\alpha}}\right)|t|^{-p-1}\,dt, \tag{3.2}$$

$$k_{p,\alpha}(x) = \frac{D_p(x)}{F_{p,\alpha}(x)[c_\alpha]^{\frac{p}{\alpha}}}, \tag{3.3}$$

где x – некоторое неотрицательное число, $0<p<\alpha<2$, а c_α задана соотношением (1.2.4), $\alpha \in (0,2)$.

Заметим, что

$$D_p(1) = D(p) = \frac{\pi}{\Gamma(1+p)\sin\frac{\pi p}{2}}, \tag{3.4}$$

$$F_{p,\alpha}(1) = F(p,\alpha) = \frac{2\pi}{p}\Gamma\left(1-\frac{p}{\alpha}\right), \tag{3.5}$$

$$k_{p,\alpha}(1) = k(p,\alpha) = \frac{\left(1-\frac{p}{\alpha}\right)\pi}{2\Gamma(p)\Gamma\left(2-\frac{p}{\alpha}\right)\sin\frac{\pi p}{2}}\left(\frac{\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^{\frac{p}{\alpha}}, \tag{3.6}$$

где $0<p<\alpha<2$.

Определение 3.1 [13, 14, 23, 26]. *Модифицированной периодограммой наблюдений* (2.1.1) *называют статистику вида*

$$I_T(\lambda) = k(p,\alpha)|d_T(\lambda)|^p, \tag{3.7}$$

где $0<p<\alpha<2$, $\lambda \in \Pi$, *а* $k(p,\alpha)$, $d_T(\lambda)$, c_α *определены соотношениями* (3.6), (2.2.9), (1.2.4) *соответственно.*

Теорема 3.1. *Для математического ожидания и дисперсии модифицированной периодограммы* $I_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, *определенной* (3.7), *справедливы равенства*

$$EI_T(\lambda) = [\gamma_T(\lambda)]^{p/\alpha},\ 0<p<\alpha, \tag{3.8}$$

$$DI_T(\lambda) = \left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)}-1\right)[\gamma_T(\lambda)]^{2p/\alpha},\ 0<p<\alpha/2, \tag{3.9}$$

где $\gamma_T(\lambda)>0$ *и* $k(p,\alpha)$ *заданы* (2.2.11), (3.6) *соответственно,* $\alpha \in (0,2)$.

Доказательство. Докажем (3.8). Подставляя в равенство (П.8) вместо x статистику $d_T(\lambda)$, воспользовавшись свойствами математического ожидания и соотношением (2.2.12), получим

$$EI_T(\lambda) = \frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\left\{\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-E\exp\{iud_T(\lambda)\}}{|u|^{1+p}}du\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\{-c_\alpha|u|^{\alpha}\gamma_T(\lambda)\}}{|u|^{1+p}}du, \tag{3.10}$$

где $F(p,\alpha)$, c_α, $\gamma_T(\lambda)$ заданы (3.5), (1.2.4), (2.2.11) соответственно. В интеграле правой части (3.10), сделав замену переменной интегрирования $u = \frac{x}{[c_\alpha\gamma_T(\lambda)]^{1/\alpha}}$, а также учитывая равенство (3.5), получим

$$EI_T(\lambda) = \frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\left\{-c_\alpha\frac{|x|^{\alpha}}{c_\alpha\gamma_T(\lambda)}\gamma_T(\lambda)\right\}}{\frac{|x|^{1+p}}{[c_\alpha\gamma_T(\lambda)]^{(1+p)/\alpha}}}\frac{1}{[c_\alpha\gamma_T(\lambda)]^{1/\alpha}}dx =$$

$$= [\gamma_T(\lambda)]^{p/\alpha}\frac{1}{F(p,\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\{-|x|^{\alpha}\}}{|x|^{1+p}}dx = [\gamma_T(\lambda)]^{p/\alpha},$$

что и требовалось показать.

Докажем (3.9). Используя равенство (П.8), получим

$$I_T^2(\lambda)=k^2(p,\alpha)\left|d_T(\lambda)\right|^{2p}=k^2(p,\alpha)D^{-1}(2p)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\{iud_T(\lambda)\}}{|u|^{1+2p}}du.$$

Воспользовавшись свойствами математического ожидания, а также соотношением (2.2.12), имеем

$$EI_T^2(\lambda)=k^2(p,\alpha)D^{-1}(2p)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\left\{-c_\alpha|u|^\alpha\gamma_T(\lambda)\right\}}{|u|^{1+2p}}du. \quad (3.11)$$

В интеграле правой части равенства (3.11), сделав замену переменной интегрирования $u=\dfrac{x}{\left[c_\alpha\gamma_T(\lambda)\right]^{1/\alpha}}$, получим

$$EI_T^2(\lambda)=k^2(p,\alpha)D^{-1}(2p)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\left\{-c_\alpha\dfrac{|x|^\alpha}{c_\alpha\gamma_T(\lambda)}\gamma_T(\lambda)\right\}}{\dfrac{|x|^{1+2p}}{\left[c_\alpha\gamma_T(\lambda)\right]^{(1+2p)/\alpha}}}\frac{1}{\left[c_\alpha\gamma_T(\lambda)\right]^{1/\alpha}}dx=$$

$$=k^2(p,\alpha)D^{-1}(2p)\left(c_\alpha\right)^{\frac{2p}{\alpha}}\left(\gamma_T(\lambda)\right)^{\frac{2p}{\alpha}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\left\{-|x|^\alpha\right\}}{|x|^{1+2p}}dx=$$

$$=k^2(p,\alpha)D^{-1}(2p)F(2p,\alpha)\left(c_\alpha\right)^{\frac{2p}{\alpha}}\left(\gamma_T(\lambda)\right)^{\frac{2p}{\alpha}}=\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)}\left(\gamma_T(\lambda)\right)^{\frac{2p}{\alpha}}.$$

Учитывая соотношение (3.8), имеем

$$DI_T(\lambda)=EI_T^2(\lambda)-\left(EI_T(\lambda)\right)^2=\left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)}-1\right)\left(\gamma_T(\lambda)\right)^{2p/\alpha}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Для любых точек* $\lambda_1,\ \lambda_2\in\Pi,\ \lambda_1-\lambda_2\neq 0(\mathrm{mod}\,2\pi)$, *ковариация модифицированной периодограммы* $I_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, *определенной соотношением* (3.7), *удовлетворяет равенству*

$$\mathrm{cov}\{I_T(\lambda_1),I_T(\lambda_2)\}=\left(\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\{-a_T(u_1,u_2)\}-\right.$$

$$\left.-\exp\{-b_T(u_1,u_2)\}\right)\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}, \quad (3.12)$$

где

$$a_T(u_1,u_2)=c_\alpha\int\limits_{\Pi}\left|u_1H_T(\mu-\lambda_1)+u_2H_T(\mu-\lambda_2)\right|^\alpha f(\mu)d\mu, \quad (3.13)$$

$$b_T(u_1,u_2)=c_\alpha\left(|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)+|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2)\right), \quad (3.14)$$

$\alpha\in(0,2)$, *а* $F(p,\alpha)$, c_α, $H_T(\lambda)$, $\gamma_T(\lambda)$ *заданы соотношениями* (3.5), (1.2.4), (2.2.3), (2.2.11) *соответственно.*

Доказательство. Подставляя в (П.8) вместо x статистику $d_T(\lambda)$ и учитывая равенство (3.4), получим

$$I_T(\lambda)=\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(ud_T(\lambda))}{|u|^{1+p}}du.$$

Применяя соотношение (3.10), имеем

$$I_T(\lambda)-EI_T(\lambda)=$$

$$=\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-\cos(ud_T(\lambda))}{|u|^{1+p}}-\frac{1-\exp\{-c_\alpha|u|^\alpha\gamma_T(\lambda)\}}{|u|^{1+p}}\right)du=$$

$$=\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{-\cos(ud_T(\lambda))+\exp\{-c_\alpha|u|^\alpha\gamma_T(\lambda)\}}{|u|^{1+p}}du.$$

Используя определение ковариации, получим

$$\mathrm{cov}(I_T(\lambda_1),I_T(\lambda_2))=E\Big(\big(I_T(\lambda_1)-EI_T(\lambda_1)\big)\big(I_T(\lambda_2)-EI_T(\lambda_2)\big)\Big)=$$

$$=\left(\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}E\left(\prod_{j=1}^{2}\Big(-\cos(u_jd_T(\lambda_j))+\right.$$

$$\left.+\exp\{-c_\alpha|u_j|^\alpha\gamma_T(\lambda_j)\}\Big)\right)\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}=$$

$$=\left(\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(E\big(\cos(u_1d_T(\lambda_1))\cos(u_2d_T(\lambda_2))\big)-$$

$$-E\Big(\cos(u_1d_T(\lambda_1))\exp\{-c_\alpha|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2)\}\Big)-$$

$$-E\Big(\exp\{-c_\alpha|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)\}\cos(u_2d_T(\lambda_2))\Big)+$$

$$+E\Big(\exp\{-(c_\alpha|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)+c_\alpha|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2))\}\Big)\Big)\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}.$$

Далее

$$E\left(\cos(u_1 d_T(\lambda_1))\cos(u_2 d_T(\lambda_2))\right)=$$

$$=E\left(\frac{1}{2}\left(\cos(u_1 d_T(\lambda_1)+u_2 d_T(\lambda_2))+\cos(u_1 d_T(\lambda_1)-u_2 d_T(\lambda_2))\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}E\left(\operatorname{Re}\left(\exp\left\{i\left(u_1 d_T(\lambda_1)+u_2 d_T(\lambda_2)\right)\right\}\right)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{Re}\left(\exp\left\{i\left(u_1 d_T(\lambda_1)-u_2 d_T(\lambda_2)\right)\right\}\right)\right). \qquad (3.15)$$

Воспользовавшись соотношением (2.2.10), в котором положим $n = 2$, $a_1 = u_1$, $a_2 = u_2$ имеем

$$E\left(\cos(u_1 d_T(\lambda_1))\cos(u_2 d_T(\lambda_2))\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\exp\left\{-c_\alpha\int_\Pi\left|u_1 H_T(\mu-\lambda_1)+u_2 H_T(\mu-\lambda_2)\right|^\alpha f(\mu)d\mu\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\exp\left\{-c_\alpha\int_\Pi\left|u_1 H_T(\mu-\lambda_1)-u_2 H_T(\mu-\lambda_2)\right|^\alpha f(\mu)d\mu\right\}.$$

Итак,

$$\operatorname{cov}(I_T(\lambda_1),I_T(\lambda_2))=\left(\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\right)^2\left\{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-c_\alpha\int_\Pi\left|u_1 H_T(\mu-\lambda_1)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+u_2 H_T(\mu-\lambda_2)\right|^\alpha f(\mu)d\mu\right\}\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-c_\alpha\int_\Pi\left|u_1 H_T(\mu-\lambda_1)-u_2 H_T(\mu-\lambda_2)\right|^\alpha f(\mu)d\mu\right\}\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-c_\alpha\left(|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)+|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2)\right)\right\}\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-c_\alpha\left(|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)+|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2)\right)\right\}\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}+$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-c_\alpha\left(|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)+|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2)\right)\right\}\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}\right\}. \qquad (3.16)$$

Во втором слагаемом правой части равенства (3.16), сделав замену переменной интегрирования $u_2 = -u_2$, имеем

$$\operatorname{cov}(I_T(\lambda_1),I_T(\lambda_2))=\left(\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\right)^2\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left\{-c_\alpha\int_\Pi\left|u_1 H_T(\mu-\lambda_1)+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+u_2 H_T(\mu-\lambda_2)\right|^\alpha f(\mu)d\mu\right\}-\exp\left\{-c_\alpha\left(|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)+|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2)\right)\right\}\right)\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}\right\}.$$

Воспользовавшись соотношениями (3.13) и (3.14), приходим к доказательству соотношения (3.12). Теорема доказана.

Если процесс $X(t)$, $t\in Z$, является действительным симметричным α-устойчивым стационарным случайным процессом, то для математического ожидания и дисперсии модифицированной периодограммы имеет место теорема 3.1 (см. [13]).

Приведем выражение для ковариации модифицированной периодограммы действительного α-устойчивого стационарного случайного процесса.

Теорема 3.3. *Для любых точек* $\lambda_1,\ \lambda_2\in\Pi$, $\lambda_1-\lambda_2\neq 0(\mathrm{mod}\,2\pi)$, *ковариация модифицированной периодограммы* $I_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, *определенной соотношением* (3.7), *удовлетворяет равенству*

$$\operatorname{cov}\{I_T(\lambda_1),I_T(\lambda_2)\}=\left(\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\{-a_T(u_1,u_2)\}-\right.$$

$$\left.-\exp\{-b_T(u_1,u_2)\}\right)\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}, \qquad (3.17)$$

где

$$a_T(u_1,u_2)=c_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\int_\Pi\left|u_1Q(\lambda_1)\left(H_T(\mu+\lambda_1)+H_T(\mu-\lambda_1)\right)+\right.$$

$$\left.+u_2Q(\lambda_2)\left(H_T(\mu+\lambda_2)+H_T(\mu-\lambda_2)\right)\right|^\alpha f(\mu)d\mu, \qquad (3.18)$$

$$b_T(u_1,u_2)=c_\alpha\left(|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)+|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2)\right), \qquad (3.19)$$

$\alpha\in(0,2)$, *а* $F(p,\alpha)$, c_α, $H_T(\lambda)$, $Q(\lambda)$, $\gamma_T(\lambda)$ *заданы соотношениями* (3.5), (1.2.4), (2.2.3), (2.3.2), (2.3.4) *соответственно.*

Доказательство. Подставляя вместо x статистику $d_T(\lambda)$ в (П.8), и учитывая равенство (3.6), получим

$$I_T(\lambda)=\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(ud_T(\lambda))}{|u|^{1+p}}du.$$

Применяя соотношение (3.10), имеем

$$I_T(\lambda)-EI_T(\lambda)=$$

$$=\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-\cos(ud_T(\lambda))}{|u|^{1+p}}-\frac{1-\exp\{-c_\alpha|u|^\alpha\gamma_T(\lambda)\}}{|u|^{1+p}}\right)du=$$

$$=\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{-\cos(ud_T(\lambda))+\exp\{-c_\alpha|u|^\alpha\gamma_T(\lambda)\}}{|u|^{1+p}}du.$$

Используя определение ковариации, получим

$$\operatorname{cov}(I_T(\lambda_1),I_T(\lambda_2))=E\Big(\big(I_T(\lambda_1)-EI_T(\lambda_1)\big)\big(I_T(\lambda_2)-EI_T(\lambda_2)\big)\Big)=$$

$$=\left(\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}E\left(\prod_{j=1}^{2}\Big(-\cos(u_jd_T(\lambda_j))+\right.$$

$$\left.+\exp\{-c_\alpha|u_j|^\alpha\gamma_T(\lambda_j)\}\Big)\right)\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}=$$

$$=\left(\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(E\big(\cos(u_1d_T(\lambda_1))\cos(u_2d_T(\lambda_2))\big)-$$

$$-E\Big(\cos(u_1d_T(\lambda_1))\exp\{-c_\alpha|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2)\}\Big)-$$

$$-E\Big(\exp\{-c_\alpha|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)\}\cos(u_2d_T(\lambda_2))\Big)+$$

$$+E\Big(\exp\{-(c_\alpha|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)+c_\alpha|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2))\}\Big)\Big)\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}.$$

Учитывая (3.15), соотношение (2.3.3), в котором положим $n=2$, $a_1=u_1$, $a_2=u_2$ имеем

$$E\big(\cos(u_1d_T(\lambda_1))\cos(u_2d_T(\lambda_2))\big)=$$

$$=\frac{1}{2}\exp\left\{-c_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\int\limits_{\Pi}\Big|u_1Q(\lambda_1)\big(H_T(\mu+\lambda_1)+H_T(\mu-\lambda_1)\big)+\right.$$

$$\left.+u_2Q(\lambda_2)\big(H_T(\mu+\lambda_2)+H_T(\mu-\lambda_2)\big)\Big|^\alpha f(\mu)d\mu\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\exp\left\{-c_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\int\limits_{\Pi}\Big|u_1Q(\lambda_1)\big(H_T(\mu+\lambda_1)+H_T(\mu-\lambda_1)\big)-\right.$$

$$\left.-u_2Q(\lambda_2)\big(H_T(\mu+\lambda_2)+H_T(\mu-\lambda_2)\big)\Big|^\alpha f(\mu)d\mu\right\}.$$

Итак,

$$\operatorname{cov}(I_T(\lambda_1),I_T(\lambda_2))=$$

$$=\left(\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\right)^2\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-c_\alpha\int\limits_{\Pi}\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\Big|u_1Q(\lambda_1)\big(H_T(\mu+\lambda_1)+\right.\right.$$

$$\left.+H_T(\mu-\lambda_1)\big)+u_2Q(\lambda_2)\big(H_T(\mu+\lambda_2)+H_T(\mu-\lambda_2)\big)\Big|^\alpha f(\mu)d\mu\right\}\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-c_\alpha\int\limits_{\Pi}\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\Big|u_1Q(\lambda_1)\big(H_T(\mu+\lambda_1)+H_T(\mu-\lambda_1)\big)-\right.$$

$$\left.-u_2Q(\lambda_2)\big(H_T(\mu+\lambda_2)+H_T(\mu-\lambda_2)\big)\Big|^\alpha f(\mu)d\mu\right\}\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-c_\alpha\Big(|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)+|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2)\Big)\Big\}\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-c_\alpha\Big(|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)+|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2)\Big)\Big\}\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}+$$

$$\left.+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-c_\alpha\Big(|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)+|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2)\Big)\Big\}\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}.\right\} \qquad (3.20)$$

Во втором слагаемом правой части равенства (3.20), сделав замену переменной интегрирования $u_2=-u_2$, имеем

$$\operatorname{cov}(I_T(\lambda_1),I_T(\lambda_2))=$$

$$=\left(\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\right)^2\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left\{-c_\alpha\int\limits_{\Pi}\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\Big|u_1Q(\lambda_1)\big(H_T(\mu+\lambda_1)+\right.\right.\right.$$

$$\left.+H_T(\mu-\lambda_1)\big)+u_2Q(\lambda_2)\big(H_T(\mu+\lambda_2)+H_T(\mu-\lambda_2)\big)\Big|^\alpha f(\mu)d\mu\right\}-$$

$$\left.\left.-\exp\Big\{-c_\alpha\Big(|u_1|^\alpha\gamma_T(\lambda_1)+|u_2|^\alpha\gamma_T(\lambda_2)\Big)\Big\}\right)\frac{du_1du_2}{|u_1u_2|^{1+p}}\right\}.$$

Воспользовавшись соотношениями (3.18) и (3.19), приходим к доказательству равенства (3.17).

Теорема доказана.

ГЛАВА 4

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МОМЕНТОВ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ

Исследуем асимптотическое поведение первых двух моментов модифицированной периодограммы $I_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, определенной соотношением (3.7).

Теорема 4.1. *Если функция* $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, *непрерывна в точке* $\lambda_0 \in \Pi$, *и ограничена на* Π, *то в условиях теоремы 3.1*

$$\lim_{T\to\infty} EI_T(\lambda_0) = \left(f(\lambda_0)\right)^{p/\alpha}, \text{ при } 0 < p < \alpha, \tag{4.1}$$

$$\lim_{T\to\infty} DI_T(\lambda_0) = \left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)} - 1\right)\left(f(\lambda_0)\right)^{2p/\alpha}, \text{ при } 0 < p < \alpha/2, \tag{4.2}$$

где $k(p,\alpha)$ *задано соотношением* (3.6).

Доказательство. Докажем соотношение (4.1). Воспользовавшись равенством (3.8), а также неравенством (П.7), получим

$$\left|EI_T(\lambda_0) - \left(f(\lambda_0)\right)^{p/\alpha}\right| = \left|\left(\gamma_T(\lambda_0)\right)^{p/\alpha} - \left(f(\lambda_0)\right)^{p/\alpha}\right| \le \left|\gamma_T(\lambda_0) - f(\lambda_0)\right|^{p/\alpha}.$$

Учитывая лемму 2.2.6, приходим к (4.1).

Проведем доказательство соотношения (4.2). Воспользовавшись равенством (3.9) и неравенством (П.7), имеем

$$\left|DI_T(\lambda_0) - \left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)} - 1\right)\left(f(\lambda_0)\right)^{2p/\alpha}\right| =$$

$$= \left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)} - 1\right)\left|\left(\gamma_T(\lambda_0)\right)^{2p/\alpha} - \left(f(\lambda_0)\right)^{2p/\alpha}\right| \le$$

$$\le \left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)} - 1\right)\left|\gamma_T(\lambda_0) - f(\lambda_0)\right|^{2p/\alpha}.$$

Таким образом, учитывая лемму 2.2.6, приходим к справедливости равенства (4.2).

Теорема доказана.

Покажем, что ковариация модифицированной периодограммы стремится к нулю при $T \to \infty$. Докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма 4.1. *Если функция* $h_T(t)$, $t = \overline{0, T-1}$, *имеет ограниченную постоянной* L *вариацию, выполняется условие*

$$B_\alpha^{(T)} \xrightarrow[T\to\infty]{} \infty, \tag{4.3}$$

то для любых точек $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$, $\lambda_1 - \lambda_2 \ne 0 \pmod{2\pi}$, *справедливы следующие соотношения:*

$$\int_\Pi \left|H_T(u-\lambda_1)H_T(u-\lambda_2)\right|^{\alpha/2} du \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \tag{4.4}$$

и

$$\int_\Pi \left|H_T(u-\lambda_1)H_T(u+\lambda_2)\right|^{\alpha/2} du \xrightarrow[T\to\infty]{} 0, \tag{4.5}$$

где $B_\alpha^{(T)}$, $H_T(\lambda)$ *заданы формулами* (2.2.5) *и* (2.2.3) *соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим интеграл в левой части (4.4) и, предполагая $\lambda_1 < \lambda_2$, $|\lambda_2 - \lambda_1| \ge \varepsilon > 0$, представим его в следующем виде:

$$\int_{-\pi}^{\lambda_1-\varepsilon} \left|H_T(u-\lambda_1)H_T(u-\lambda_2)\right|^{\alpha/2} du + \int_{\lambda_1-\varepsilon}^{\lambda_1+\varepsilon} \left|H_T(u-\lambda_1)H_T(u-\lambda_2)\right|^{\alpha/2} du +$$

$$+ \int_{\lambda_1+\varepsilon}^{\lambda_2-\varepsilon} \left|H_T(u-\lambda_1)H_T(u-\lambda_2)\right|^{\alpha/2} du + \int_{\lambda_2-\varepsilon}^{\lambda_2+\varepsilon} \left|H_T(u-\lambda_1)H_T(u-\lambda_2)\right|^{\alpha/2} du +$$

$$+ \int_{\lambda_2+\varepsilon}^{\pi} \left|H_T(u-\lambda_1)H_T(u-\lambda_2)\right|^{\alpha/2} du = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5.$$

Учитывая соотношения (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5), а также неравенство (2.2.2), получим

$$J_1 + J_3 + J_5 \le \frac{L^\alpha}{B_\alpha^{(T)}}\left(\int_{-\pi}^{\lambda_1-\varepsilon} \frac{1}{\left|\sin\frac{u-\lambda_1}{2}\sin\frac{u-\lambda_2}{2}\right|^{\alpha/2}} du + \right.$$

$$+\int_{\lambda_1+\varepsilon}^{\lambda_2-\varepsilon}\frac{1}{\left|\sin\frac{u-\lambda_1}{2}\sin\frac{u-\lambda_2}{2}\right|^{\alpha/2}}du+$$

$$\left.+\int_{\lambda_2+\varepsilon}^{\pi}\frac{1}{\left|\sin\frac{u-\lambda_1}{2}\sin\frac{u-\lambda_2}{2}\right|^{\alpha/2}}du\right)\le\frac{L^{\alpha}}{B_{\alpha}^{(T)}}\left(\frac{\pi+\lambda_1-\varepsilon}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\lambda_2}{2}\right)^{\alpha/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_2-\lambda_1-2\varepsilon}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\alpha}}+\frac{\pi-\lambda_2-\varepsilon}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\lambda_1}{2}\right)^{\alpha/2}}\right). \tag{4.6}$$

Воспользовавшись соотношениями (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5), а также неравенством (2.2.2), имеем

$$J_2+J_4\le\frac{L^{\alpha/2}}{B_{\alpha}^{(T)}}\left(\int_{\lambda_1-\varepsilon}^{\lambda_1+\varepsilon}\frac{1}{\left|\sin\frac{u-\lambda_2}{2}\right|^{\alpha/2}}\left|H^{(T)}(u-\lambda_1)\right|^{\alpha/2}du+\right.$$

$$\left.+\int_{\lambda_2-\varepsilon}^{\lambda_2+\varepsilon}\frac{1}{\left|\sin\frac{u-\lambda_1}{2}\right|^{\alpha/2}}\left|H^{(T)}(u-\lambda_2)\right|^{\alpha/2}du\right)\le$$

$$\le\frac{L^{\alpha/2}}{B_{\alpha}^{(T)}}\left(\frac{1}{\left|\sin\frac{\lambda_2-\lambda_1-\varepsilon}{2}\right|^{\alpha/2}}\int_{\lambda_1-\varepsilon}^{\lambda_1+\varepsilon}\left|H^{(T)}(u-\lambda_1)\right|^{\alpha/2}du+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\left|\sin\frac{\lambda_1-\lambda_2+\varepsilon}{2}\right|^{\alpha/2}}\int_{\lambda_2-\varepsilon}^{\lambda_2+\varepsilon}\left|H^{(T)}(u-\lambda_2)\right|^{\alpha/2}du\right).$$

В первом и втором интегралах правой части полученного неравенства, сделав замену переменных интегрирования $v=u-\lambda_1$ и $v=u-\lambda_2$

соответственно, а также расширив область интегрирования до $[-\pi,\pi]$, получим

$$J_2+J_4\le\frac{2L^{\alpha/2}}{B_{\alpha}^{(T)}\left|\sin\frac{\lambda_2-\lambda_1-\varepsilon}{2}\right|^{\alpha/2}}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H^{(T)}(v)\right|^{\alpha/2}dv.$$

Далее, воспользовавшись неравенством Коши – Буняковского, а также соотношением (2.2.5), имеем

$$J_2+J_4\le\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{B_{\alpha}^{(T)}}}\left(\frac{2(2L+1)^{\alpha/2}}{\left|\sin\frac{\lambda_2-\lambda_1-\varepsilon}{2}\right|^{\alpha/2}}\right). \tag{4.7}$$

Таким образом, учитывая условие (4.3) в правых частях неравенств (4.6) и (4.7) получим, что для любых $\lambda_1-\lambda_2\ne 0(\mathrm{mod}\,2\pi)$

$$\int_{\Pi}\left|H_T(u-\lambda_1)H_T(u-\lambda_2)\right|^{\alpha/2}du\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

Аналогичным образом получим, что

$$\int_{\Pi}\left|H_T(u-\lambda_1)H_T(u+\lambda_2)\right|^{\alpha/2}du\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

Случай, когда $\lambda_1>\lambda_2$ рассматривается аналогичным образом. Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Если спектральная плотность $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, положительна, непрерывна в точках $\lambda_1,\lambda_2\in\Pi$ таких, что, $\lambda_1-\lambda_2\ne 0(\mathrm{mod}\,2\pi)$, ограничена на Π и выполняется условие (4.3), то ковариация модифицированной периодограммы $I_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, задаваемая равенством (3.12), удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{T\to\infty}\mathrm{cov}\{I_T(\lambda_1),I_T(\lambda_2)\}=0, \tag{4.8}$$

где $0<p<\alpha/2$, $\alpha\in(0,2)$.

Доказательство. Применяя неравенство (П.4) к подынтегральному выражению правой части соотношения (3.12), получим

$$\left|\exp\{-a_T(u_1,u_2)\}-\exp\{-b_T(u_1,u_2)\}\right|\le$$

$$\le\exp\{-b_T(u_1,u_2)\}\left|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)\right|\exp\{\left|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)\right|\}.$$

Учитывая равенства (3.13), (3.14), а также соотношение (2.2.11), имеем

$$\left|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)\right| = \left| -c_\alpha \int_\Pi \left|u_1 H_T(\mu-\lambda_1)+\right.\right.$$

$$\left. + u_2 H_T(\mu-\lambda_2)\right|^\alpha f(\mu)d\mu + c_\alpha \int_\Pi \left(\left|u_1 H_T(\mu-\lambda_1)\right|^\alpha + \right.$$

$$\left.\left. + \left|u_2 H_T(\mu-\lambda_2)\right|^\alpha \right) f(\mu)d\mu \right| \le$$

$$\le c_\alpha \int_\Pi \Big| \left|u_1 H_T(\mu-\lambda_1)+u_2 H_T(\mu-\lambda_2)\right|^\alpha -$$

$$- \left|u_1 H_T(\mu-\lambda_1)\right|^\alpha - \left|u_2 H_T(\mu-\lambda_2)\right|^\alpha \Big| f(\mu)d\mu .$$

Применяя неравенство (П.3) к подынтегральному выражению правой части последнего равенства, получим

$$\left|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)\right| \le$$

$$\le c_\alpha \int_\Pi \left|u_1 u_2 H_T(\mu-\lambda_1) H_T(\mu-\lambda_2)\right|^{\alpha/2} f(\mu)d\mu \le$$

$$\le c_\alpha \left|u_1 u_2\right|^{\alpha/2} \max_{\mu\in\Pi} f(\mu) \int_\Pi \left|H_T(\mu-\lambda_1) H_T(\mu-\lambda_2)\right|^{\alpha/2} d\mu . \qquad (4.9)$$

Учитывая (4.4)

$$\lim_{T\to\infty} \left|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)\right| = 0 . \qquad (4.10)$$

Таким образом, используя неравенство (4.9), имеем

$$\left|\mathrm{cov}\{I_T(\lambda_1), I_T(\lambda_2)\}\right| \le$$

$$\le \left(\frac{1}{F(p,\alpha) c_\alpha^{p/\alpha}} \right)^\alpha c_\alpha \max_{\mu\in\Pi} f(\mu) \int_\Pi \left|H_T(\mu-\lambda_1) H_T(\mu-\lambda_2)\right|^{\alpha/2} d\mu \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ \left|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)\right| - b_T(u_1,u_2) \right\} \frac{du_1 du_2}{\left|u_1 u_2\right|^{1+p-\alpha/2}} . \qquad (4.11)$$

Покажем, что двойной интеграл в правой части неравенства (4.11) при $T\to\infty$ ограничен. Из (4.10) следует, что

$$\lim_{T\to\infty} \exp\left\{ \left|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)\right| \right\} = 1 .$$

Учитывая (2.2.13), получим

$$\lim_{T\to\infty} b_T(u_1,u_2) = -c_\alpha |u_1|^\alpha f(\lambda_1) - c_\alpha |u_2|^\alpha f(\lambda_2) .$$

Следовательно,

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ \left|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)\right| - b_T(u_1,u_2) \} \frac{du_1 du_2}{\left|u_1 u_2\right|^{1+p-\alpha/2}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|u_1 u_2\right|^{\alpha/2-p-1} \exp\{-c_\alpha |u_1|^\alpha f(\lambda_1) - c_\alpha |u_2|^\alpha f(\lambda_2)\} du_1 du_2 =$$

$$= 4 \prod_{j=1}^{2} \int_0^\infty \left|u_j\right|^{\alpha/2-p-1} \exp\{-c_\alpha \left|u_j\right|^\alpha f(\lambda_j)\} du_j =$$

$$= \frac{4 (c_\alpha)^{\frac{2p-\alpha}{\alpha}} \left(f(\lambda_1) f(\lambda_2)\right)^{\frac{2p-\alpha}{2\alpha}} \left(\Gamma\left(\frac{\alpha-2p}{2\alpha} \right) \right)^2}{\alpha^2} .$$

Итак, предел правой части неравенства (4.11) стремится к нулю при $T\to\infty$. Таким образом, соотношение (4.8) справедливо.

Теорема доказана.

Далее рассмотрим случай, когда процесс $X(t)$ является действительным.

Теорема 4.3. *Если спектральная плотность* $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, *положительна, непрерывна в точках* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$ *таких, что,* $\lambda_1-\lambda_2 \ne 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, *ограничена на* Π *и выполняется условие* (4.3), *то ковариация модифицированной периодограммы* $I_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, *задаваемая равенством* (3.17), *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{cov}\{I_T(\lambda_1), I_T(\lambda_2)\} = 0, \qquad (4.12)$$

где $0<p<\alpha/2$, $\alpha\in(0,2)$.

Доказательство. Применяя неравенство (П.4) к подынтегральному выражению правой части соотношения (3.17), получим

$$\left|\exp\{-a_T(u_1,u_2)\} - \exp\{-b_T(u_1,u_2)\}\right| \le$$

$$\le \exp\{-b_T(u_1,u_2)\} \left|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)\right| \exp\{ \left|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)\right| \} .$$

Учитывая представления (3.18), (3.19), а также соотношение (2.3.4), имеем

$$|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)|=$$

$$\left|-c_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\int_\Pi \left|u_1Q(\lambda_1)\left(H_T(\mu-\lambda_1)+H_T(\mu+\lambda_1)\right)+\right.\right.$$

$$\left.+u_2Q(\lambda_2)\left(H_T(\mu-\lambda_2)+H_T(\mu+\lambda_2)\right)\right|^\alpha f(\mu)d\mu+$$

$$+c_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\int_\Pi\left(\left|u_1Q(\lambda_1)\left(H_T(\mu-\lambda_1)+H_T(\mu-\lambda_2)\right)\right|^\alpha+\right.$$

$$\left.\left.+\left|u_2Q(\lambda_2)\left(H_T(\mu-\lambda_2)+H_T(\mu+\lambda_2)\right)\right|^\alpha\right)f(\mu)d\mu\right|=$$

$$=\frac{c_\alpha}{2^\alpha}\left|\int_\Pi\left(\left|u_1Q(\lambda_1)\left(H_T(\mu-\lambda_1)+H_T(\mu+\lambda_1)\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.+u_2Q(\lambda_2)\left(H_T(\mu-\lambda_2)+H_T(\mu+\lambda_2)\right)\right|^\alpha-$$

$$-\left|u_1Q(\lambda_1)\left(H_T(\mu-\lambda_1)+H_T(\mu+\lambda_1)\right)\right|^\alpha-$$

$$\left.\left.-\left|u_2Q(\lambda_2)\left(H_T(\mu-\lambda_2)+H_T(\mu+\lambda_2)\right)\right|^\alpha\right)f(\mu)d\mu\right|\le$$

$$\le\frac{c_\alpha}{2^\alpha}\int_\Pi\left|\left|u_1Q(\lambda_1)\left(H_T(\mu-\lambda_1)+H_T(\mu+\lambda_1)\right)+\right.\right.$$

$$\left.+u_2Q(\lambda_2)\left(H_T(\mu-\lambda_2)+H_T(\mu+\lambda_2)\right)\right|^\alpha-$$

$$-\left|u_1Q(\lambda_1)\left(H_T(\mu-\lambda_1)+H_T(\mu+\lambda_1)\right)\right|^\alpha-$$

$$\left.-\left|u_2Q(\lambda_2)\left(H_T(\mu-\lambda_2)+H_T(\mu+\lambda_2)\right)\right|^\alpha\right|f(\mu)d\mu.$$

Применяя неравенство (П.3) к подынтегральному выражению правой части последнего неравенства, получим

$$|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)|\le$$

$$\le\frac{c_\alpha}{2^{\alpha-1}}\int_\Pi\left|u_1u_2Q(\lambda_1)Q(\lambda_2)\left(H_T(\mu-\lambda_1)+H_T(\mu+\lambda_1)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(H_T(\mu-\lambda_2)+H_T(\mu+\lambda_2)\right)\right|^{\alpha/2}f(\mu)d\mu=$$

$$=\frac{c_\alpha}{2^{\alpha-1}}\int_\Pi\left|u_1u_2Q(\lambda_1)Q(\lambda_2)\left(H_T(\mu-\lambda_1)H_T(\mu-\lambda_2)+\right.\right.$$

$$+H_T(\mu-\lambda_1)H_T(\mu+\lambda_2)+H_T(\mu+\lambda_1)H_T(\mu-\lambda_2)+$$

$$\left.\left.+H_T(\mu+\lambda_1)H_T(\mu+\lambda_2)\right)\right|^{\alpha/2}f(\mu)d\mu.$$

Учитывая неравенство (П.1), имеем

$$|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)|\le$$

$$\le\frac{c_\alpha}{2^{\alpha-1}}\int_\Pi\left|u_1u_2Q(\lambda_1)Q(\lambda_2)H_T(\mu-\lambda_1)H_T(\mu-\lambda_2)\right|^{\alpha/2}f(\mu)d\mu+$$

$$+\frac{c_\alpha}{2^{\alpha-1}}\int_\Pi\left|u_1u_2Q(\lambda_1)Q(\lambda_2)H_T(\mu-\lambda_1)H_T(\mu+\lambda_2)\right|^{\alpha/2}f(\mu)d\mu+$$

$$+\frac{c_\alpha}{2^{\alpha-1}}\int_\Pi\left|u_1u_2Q(\lambda_1)Q(\lambda_2)H_T(\mu+\lambda_1)H_T(\mu-\lambda_2)\right|^{\alpha/2}f(\mu)d\mu+$$

$$+\frac{c_\alpha}{2^{\alpha-1}}\int_\Pi\left|u_1u_2Q(\lambda_1)Q(\lambda_2)H_T(\mu+\lambda_1)H_T(\mu+\lambda_2)\right|^{\alpha/2}f(\mu)d\mu. \quad (4.13)$$

В третьем и четвертом интеграле правой части неравенства (4.13) сделаем замену переменной интегрирования $\mu=-\mu$, получим

$$|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)|\le$$

$$\le\frac{c_\alpha}{2^{\alpha-2}}\left(Q(\lambda_1)Q(\lambda_2)\right)^{\alpha/2}|u_1u_2|^{\alpha/2}\max_{\mu\in\Pi}f(\mu)\times$$

$$\times\left(\int_\Pi\left|H_T(\mu-\lambda_1)H_T(\mu-\lambda_2)\right|^{\alpha/2}d\mu+\right.$$

$$\left.+\int_\Pi\left|H_T(\mu-\lambda_1)H_T(\mu+\lambda_2)\right|^{\alpha/2}d\mu\right). \quad (4.14)$$

Учитывая (4.4) и (4.5),

$$\lim_{T\to\infty}|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)|=0. \quad (4.15)$$

Таким образом, используя неравенство (4.14), имеем

$$|\mathrm{cov}\{I_T(\lambda_1),I_T(\lambda_2)\}|\le$$

$$\leq \left(\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\right)^\alpha \frac{c_\alpha}{2^{\alpha-2}}\left(Q(\lambda_1)Q(\lambda_2)\right)^{\alpha/2}\max_{\mu\in\Pi} f(\mu)\times$$

$$\times\left(\int_\Pi \left|H_T(\mu-\lambda_1)H_T(\mu-\lambda_2)\right|^{\alpha/2}d\mu+\int_\Pi \left|H_T(\mu-\lambda_1)H_T(\mu+\lambda_2)\right|^{\alpha/2}d\mu\right)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\left|a_T(u_1,u_2)-b_T(u_1,u_2)\right|-b_T(u_1,u_2)\}\frac{du_1du_2}{\left|u_1u_2\right|^{1+p-\alpha/2}}. \qquad (4.16)$$

Доказательство того, что двойной интеграл в правой части неравенства (4.16) при $T\to\infty$ ограничен, проводится аналогично доказательству, приведенному в теореме 4.2. Таким образом, справедливо соотношение (4.12). Теорема доказана.

ГЛАВА 5

СОСТОЯТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ УСТОЙЧИВОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

5.1. Асимптотические свойства моментов вспомогательной статистики $\tilde{f}_T(\lambda)$

Как видно из теоремы 4.1, статистика $I_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, определенная соотношением (3.7), является асимптотически несмещенной оценкой для функции $\left(f(\lambda)\right)^{p/\alpha}$, $\lambda\in\Pi$, но не является состоятельной.

В качестве оценки спектральной плотности рассмотрим статистику вида

$$\hat{f}_T(\lambda)=\left(\tilde{f}_T(\lambda)\right)^{\alpha/p}, \qquad (5.1.1)$$

где $\tilde{f}_T(\lambda)$ имеет представление

$$\tilde{f}_T(\lambda)=\int_\Pi W_T(\nu-\lambda)I_T(\nu)d\nu=\int_\Pi W_T(\nu)I_T(\nu+\lambda)d\nu, \qquad (5.1.2)$$

$0<p<\alpha<2$, $I_T(\nu)$, $\nu\in\Pi$, задана соотношением (3.7), а спектральное окно $W_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, является неотрицательной, четной, 2π-периодичной функцией удовлетворяющей условиям

$$1)\ \int_\Pi W_T(\nu)d\nu=1,\ T=1,2,..., \qquad (5.1.3)$$

$$2)\ \lim_{T\to\infty}\int_{\Pi\setminus\{|\nu|\leq\delta\}} W_T(\nu)d\nu=0,\ 0<\delta<\pi. \qquad (5.1.4)$$

Теорема 5.1.1. *Если спектральная плотность* $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, *положительна, непрерывна в точке* $\lambda_0\in\Pi$ *и ограничена на* Π, *то для ма-*

тематического ожидания статистики $\tilde{f}_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, *определенной равенством* (5.1.2), *справедливо следующее соотношение*:

$$\lim_{T\to\infty} E\tilde{f}_T(\lambda_0) = \left(f(\lambda_0)\right)^{p/\alpha}, \qquad (5.1.5)$$

где $0 < p < \alpha < 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись свойствами математического ожидания, равенствами (5.1.2) и (3.8), получим

$$E\tilde{f}_T(\lambda_0) = \int_\Pi W_T(v)\left(\gamma_T(v+\lambda_0)\right)^{p/\alpha} dv.$$

Воспользовавшись свойством (5.1.3) для функции $W_T(\lambda)$, получим

$$\left|E\tilde{f}_T(\lambda_0) - \left(f(\lambda_0)\right)^{p/\alpha}\right| \le \int_\Pi W_T(v)\left|\left(\gamma_T(v+\lambda_0)\right)^{p/\alpha} - \left(f(\lambda_0)\right)^{p/\alpha}\right| dv = J.$$

Учитывая неравенство (П.6), имеем

$$J \le \int_\Pi W_T(v)\frac{p}{2\alpha}\left(\left(\gamma_T(v+\lambda_0)\right)^{p/\alpha-1} + \left(f(\lambda_0)\right)^{p/\alpha-1}\right)\left|\gamma_T(v+\lambda_0) - f(\lambda_0)\right| dv \le$$

$$\le \max_{v\in\Pi}\frac{p}{2\alpha}\left(\left(\gamma_T(v+\lambda_0)\right)^{p/\alpha-1} + \left(f(\lambda_0)\right)^{p/\alpha-1}\right)\int_\Pi W_T(v)\left|\gamma_T(v+\lambda_0) - f(\lambda_0)\right| dv.$$

Обозначим $C = \max_{v\in\Pi}\frac{p}{2\alpha}\left(\left(\gamma_T(v+\lambda_0)\right)^{p/\alpha-1} + \left(f(\lambda_0)\right)^{p/\alpha-1}\right)$.

$$J \le C\int_\Pi W_T(v)\left|\gamma_T(v+\lambda_0) - f(v+\lambda_0) + f(v+\lambda_0) - f(\lambda_0)\right| dv \le$$

$$\le C\int_\Pi W_T(v)\left|\gamma_T(v+\lambda_0) - f(v+\lambda_0)\right| dv + C\int_\Pi W_T(v)\left|f(v+\lambda_0) - f(\lambda_0)\right| dv.$$

Воспользовавшись неравенством (2.3.7), получим

$$J \le \frac{C}{2}\int_\Pi W_T(v)\int_\Pi \left|H_T(u)\right|^\alpha \left|f(u-(v+\lambda_0)) - f(-(v+\lambda_0))\right| du dv +$$

$$+\frac{C}{2}\int_\Pi W_T(v)\int_\Pi \left|H_T(u)\right|^\alpha \left|f(u+(v+\lambda_0)) - f(v+\lambda_0)\right| du dv +$$

$$+C\int_\Pi W_T(v)\left|f(v+\lambda_0) - f(\lambda_0)\right| dv =$$

$$= \frac{C}{2}\int_\Pi W_T(v)\int_\Pi \left|H_T(u)\right|^\alpha \left|f(u-(v+\lambda_0)) - f(-\lambda_0) +\right.$$

$$\left. + f(-\lambda_0) - f(-(v+\lambda_0))\right| du dv +$$

$$+\frac{C}{2}\int_\Pi W_T(v)\int_\Pi \left|H_T(u)\right|^\alpha \left|f(u+(v+\lambda_0)) - f(\lambda_0) + f(\lambda_0) - f(v+\lambda_0)\right| du dv +$$

$$+C\int_\Pi W_T(v)\left|f(v+\lambda_0) - f(\lambda_0)\right| dv \le$$

$$\le \frac{C}{2}\int_\Pi W_T(v)\int_\Pi \left|H_T(u)\right|^\alpha \left|f(u-(v+\lambda_0)) - f(-\lambda_0)\right| du dv +$$

$$+\frac{C}{2}\int_\Pi W_T(v)\int_\Pi \left|H_T(u)\right|^\alpha \left|f(-(v+\lambda_0)) - f(-\lambda_0)\right| du dv +$$

$$+\frac{C}{2}\int_\Pi W_T(v)\int_\Pi \left|H_T(u)\right|^\alpha \left|f(u+(v+\lambda_0)) - f(\lambda_0)\right| du dv +$$

$$+\frac{C}{2}\int_\Pi W_T(v)\int_\Pi \left|H_T(u)\right|^\alpha \left|f(v+\lambda_0) - f(\lambda_0)\right| du dv +$$

$$+C\int_\Pi W_T(v)\left|f(v+\lambda_0) - f(\lambda_0)\right| dv =$$

$$= \frac{C}{2}\int_\Pi W_T(v)\int_\Pi \left|H_T(u)\right|^\alpha \left|f(u-(v+\lambda_0)) - f(-\lambda_0)\right| du dv +$$

$$+\frac{C}{2}\int_\Pi W_T(v)\int_\Pi \left|H_T(u)\right|^\alpha \left|f(u+(v+\lambda_0)) - f(\lambda_0)\right| du dv +$$

$$+C\int_\Pi W_T(v)\int_\Pi \left|H_T(u)\right|^\alpha \left|f(v+\lambda_0) - f(\lambda_0)\right| du dv +$$

$$+C\int_\Pi W_T(v)\left|f(v+\lambda_0) - f(\lambda_0)\right| dv =$$

$$= \frac{C}{2}\int_\Pi W_T(v)\int_\Pi \left|H_T(u)\right|^\alpha \left|f(u-(v+\lambda_0)) - f(-\lambda_0)\right| du dv +$$

$$+\frac{C}{2}\int_\Pi W_T(v)\int_\Pi \left|H_T(u)\right|^\alpha \left|f(u+(v+\lambda_0)) - f(\lambda_0)\right| du dv +$$

$$+2C\int_\Pi W_T(v)\left|f(v+\lambda_0) - f(\lambda_0)\right| dv = J_1.$$

В силу непрерывности функции $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, в точке $\lambda_0 \in \Pi$, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие δ_1 и δ_2, что при $|v| \le \delta_1$, $|u| \le \delta_2$, будут выполняться неравенства

$$\left|f(u \pm (v+\lambda_0)) - f(\lambda_0)\right| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|f(v+\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Разобьем области интегрирования в J_1 следующим образом:

$$J_1=\frac{C}{2}\int\limits_{|v|\le\delta_1}W_T(v)\int\limits_{|u|\le\delta_2}|H_T(u)|^{\alpha}\left|f(u-(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|dudv+$$

$$+\frac{C}{2}\int\limits_{\Pi\setminus\{|v|\le\delta_1\}}W_T(v)\int\limits_{|u|\le\delta_2}|H_T(u)|^{\alpha}\left|f(u-(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|dudv+$$

$$+\frac{C}{2}\int\limits_{|v|\le\delta_1}W_T(v)\int\limits_{\Pi\setminus\{|u|\le\delta_2\}}|H_T(u)|^{\alpha}\left|f(u-(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|dudv+$$

$$+\frac{C}{2}\int\limits_{\Pi\setminus\{|v|\le\delta_1\}}W_T(v)\int\limits_{\Pi\setminus\{|u|\le\delta_2\}}|H_T(u)|^{\alpha}\left|f(u-(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|dudv+$$

$$+\frac{C}{2}\int\limits_{|v|\le\delta_1}W_T(v)\int\limits_{|u|\le\delta_2}|H_T(u)|^{\alpha}\left|f(u+(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|dudv+$$

$$+\frac{C}{2}\int\limits_{\Pi\setminus\{|v|\le\delta_1\}}W_T(v)\int\limits_{|u|\le\delta_2}|H_T(u)|^{\alpha}\left|f(u+(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|dudv+$$

$$+\frac{C}{2}\int\limits_{|v|\le\delta_1}W_T(v)\int\limits_{\Pi\setminus\{|u|\le\delta_2\}}|H_T(u)|^{\alpha}\left|f(u+(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|dudv+$$

$$+\frac{C}{2}\int\limits_{\Pi\setminus\{|v|\le\delta_1\}}W_T(v)\int\limits_{\Pi\setminus\{|u|\le\delta_2\}}|H_T(u)|^{\alpha}\left|f(u+(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|dudv+$$

$$+2C\int\limits_{|v|\le\delta_1}W_T(v)\left|f(v+\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|dv+$$

$$+2C\int\limits_{\Pi\setminus\{|v|\le\delta_1\}}W_T(v)\left|f(v+\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|dv\le$$

$$\le\frac{C}{2}\int\limits_{|v|\le\delta_1}W_T(v)\int\limits_{|u|\le\delta_2}|H_T(u)|^{\alpha}\left|f(u-(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|dudv+$$

$$+\frac{C}{2}\max_{v,u\in\Pi}\left|f(u-(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|\int\limits_{\Pi\setminus\{|v|\le\delta_1\}}W_T(v)\int\limits_{|u|\le\delta_2}|H_T(u)|^{\alpha}dudv+$$

$$+\frac{C}{2}\max_{v,u\in\Pi}\left|f(u-(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|\int\limits_{|v|\le\delta_1}W_T(v)\int\limits_{\Pi\setminus\{|u|\le\delta_2\}}|H_T(u)|^{\alpha}dudv+$$

$$+\frac{C}{2}\int\limits_{|v|\le\delta_1}W_T(v)\int\limits_{|u|\le\delta_2}|H_T(u)|^{\alpha}\left|f(u+(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|dudv+$$

$$+\frac{C}{2}\max_{v,u\in\Pi}\left|f(u+(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|\int\limits_{\Pi\setminus\{|v|\le\delta_1\}}W_T(v)\int\limits_{|u|\le\delta_2}|H_T(u)|^{\alpha}dudv+$$

$$+\frac{C}{2}\max_{v,u\in\Pi}\left|f(u+(v+\lambda_0))-f(\lambda_0)\right|\int\limits_{|v|\le\delta_1}W_T(v)\int\limits_{\Pi\setminus\{|u|\le\delta_2\}}|H_T(u)|^{\alpha}dudv+$$

$$+2C\int\limits_{|v|\le\delta_1}W_T(v)\left|f(v+\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|dv+$$

$$+2C\max_{v\in\Pi}\left|f(v+\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|\int\limits_{\Pi\setminus\{|v|\le\delta_1\}}W_T(v)dv=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7+I_8.$$

Таким образом, учитывая в I_2, I_5 и I_8 свойство спектрального окна (5.1.4), в I_3 и I_6 свойства ядра $|H_T(\lambda)|^{\alpha}$, $\lambda\in\Pi$, а в I_1, I_4 и I_7, воспользовавшись непрерывностью функции $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, в точке $\lambda_0\in\Pi$, приходим к доказательству соотношения (5.1.5). Теорема доказана.

Будем предполагать, что спектральное окно $W_T(\lambda)$ представимо в виде [5]

$$W_T(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=-M_T}^{M_T}k_T(l)\exp\{-i\lambda l\}=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=-M_T}^{M_T}k_T(l)\cos(\lambda l),\qquad(5.1.6)$$

$k_T(l)=k\left(\dfrac{l}{M_T}\right)$, $M_T\in N$, $M_T\underset{T\to\infty}{\to}\infty$, $\dfrac{M_T}{T}\underset{T\to\infty}{\to}0$, а $k(x)$ – ограниченная, четная функция, удовлетворяющая условиям:

1) $|k(x)|<1$, при $x\in[-1,1]$, $x\neq0$, $k(0)=1$;
2) $\int\limits_{-1}^{1}k^2(x)dx<\infty$.

Пусть L_T – числовая последовательность, такая, что

$$L_T\xrightarrow[T\to\infty]{}\infty,\text{ но }\frac{M_T}{L_T}\xrightarrow[T\to\infty]{}0\text{ и }\frac{L_T}{T}\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

Теорема 5.1.2. *Если спектральная плотность* $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, *положительна, непрерывна на* Π, *выполняется условие* (4.3), *то дисперсия* *статистики* $\tilde{f}_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, *определенной равенством* (5.1.2), *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{T\to\infty} D\tilde{f}_T(\lambda)=0,\quad 0<p<\frac{\alpha}{2}. \qquad (5.1.7)$$

Доказательство. Заменяя в (5.1.2) интеграл интегральной суммой приведенной в [12], получим

$$D\tilde{f}_T(\lambda)=D\left(\int_\Pi W_T(\nu)I_T(\lambda+\nu)d\nu\right)=$$

$$=D\left(\frac{2\pi}{L_T}\sum_{j=-[L_T/2]+1}^{[L_T/2]} W_T(\nu_j)I_T(\lambda+\nu_j)\right)+O\left(\frac{2\pi}{L_T}\right),$$

где $\nu_j=\frac{\pi j}{L_T}$, $j=-[L_T/2]+1, ..., [L_T/2]$.

Воспользовавшись соотношением (3.9), имеем

$$D\tilde{f}_T(\lambda)=\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)^2\sum_{j=-[L_T/2]+1}^{[L_T/2]} W_T^2(\nu_j)\left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)}-1\right)\left(\gamma_T(\lambda+\nu_j)\right)^{2p/\alpha}+$$

$$+\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)^2\sum_{j_1=-[L_T/2]+1}^{[L_T/2]}\sum_{\substack{j_2=-[L_T/2]+1\\ j_1\neq j_2}}^{[L_T/2]} W_T(\nu_{j_1})W_T(\nu_{j_2})\times$$

$$\times\operatorname{cov}\left(I_T(\lambda+\nu_{j_1}),I_T(\lambda+\nu_{j_2})\right)+O\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)\le$$

$$\le\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)\int_\Pi W_T^2(\nu)\left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)}-1\right)\left(\gamma_T(\lambda+\nu)\right)^{2p/\alpha}d\nu+$$

$$+\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)^2\sum_{j_1=-[L_T/2]+1}^{[L_T/2]}\sum_{\substack{j_2=-[L_T/2]+1\\ j_1\neq j_2}}^{[L_T/2]} W_T(\nu_{j_1})W_T(\nu_{j_2})\times$$

$$\times\operatorname{cov}\left(I_T(\lambda+\nu_{j_1}),I_T(\lambda+\nu_{j_2})\right)+O\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)\le$$

$$\le\left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)}-1\right)\max_{\nu\in\Pi}\left(\gamma_T(\lambda+\nu)\right)^{2p/\alpha}\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)\int_\Pi W_T^2(\nu)d\nu+$$

$$+\max_{\substack{j_1,j_2\\ j_1\neq j_2}}\operatorname{cov}\left(I_T(\lambda+\nu_{j_1}),I_T(\lambda+\nu_{j_2})\right)\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)^2\times$$

$$\times\sum_{j_1=-[L_T/2]+1}^{[L_T/2]}\sum_{\substack{j_2=-[L_T/2]+1\\ j_1\neq j_2}}^{[L_T/2]} W_T(\nu_{j_1})W_T(\nu_{j_2})+O\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)=S_1+S_2.$$

Рассмотрим S_1.

$$\int_\Pi W_T^2(\nu)d\nu=\int_\Pi\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{l_1=-M_T}^{M_T}k\left(\frac{l_1}{M_T}\right)\exp\{-i\nu l_1\}\sum_{l_2=-M_T}^{M_T}k\left(\frac{l_2}{M_T}\right)\exp\{i\nu l_2\}\,d\nu.$$

Меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$\int_\Pi W_T^2(\nu)d\nu=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{l_1=-M_T}^{M_T}k\left(\frac{l_1}{M_T}\right)\sum_{l_2=-M_T}^{M_T}k\left(\frac{l_2}{M_T}\right)\int_\Pi\exp\{i(l_2-l_1)\nu\}d\nu.$$

Так как для $p\in Z$

$$\int_\Pi\exp\{i\lambda p\}d\lambda=\begin{cases}2\pi, & p=0,\\ 0, & p\neq 0,\end{cases}$$

тогда

$$J=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=-M_T}^{M_T}k^2\left(\frac{l}{M_T}\right).$$

Заменяя полученную сумму интегралом, получим

$$\int_\Pi W_T^2(\nu)d\nu=\frac{2M_T+1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k^2(x)dx+O(M_T).$$

Таким образом, используя свойство 2 для $k(x)$, имеем

$$S_1=O\left(\frac{M_T}{L_T}\right)\xrightarrow[T\to\infty]{}0,\ \text{так как}\ \frac{M_T}{L_T}\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

Рассмотрим S_2. Учитывая свойство спектрального окна, получим

$$\max_{\substack{j_1,j_2\\ j_1\neq j_2}}\operatorname{cov}\left(I_T(\lambda+\nu_{j_1}),I_T(\lambda+\nu_{j_2})\right)\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)^2\times$$

$$\times\sum_{j_1=-[L_T/2]+1}^{[L_T/2]}\sum_{\substack{j_2=-[L_T/2]+1\\ j_1\neq j_2}}^{[L_T/2]} W_T(\nu_{j_1})W_T(\nu_{j_2})+O\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)=$$

$$= \max_{\substack{j_1,j_2 \\ j_1 \neq j_2}} \operatorname{cov}\left(I_T(\lambda+\nu_{j_1}), I_T(\lambda+\nu_{j_2})\right)\left(\frac{2\pi}{L_T}\right)^2 \times$$

$$\times \sum_{j_1=-[L_T/2]+1}^{[L_T/2]} W_T(\nu_{j_1}) \sum_{j_2=-[L_T/2]+1}^{[L_T/2]} W_T(\nu_{j_2}) + O\left(\frac{2\pi}{L_T}\right) =$$

$$= \max_{\substack{j_1,j_2 \\ j_1 \neq j_2}} \operatorname{cov}\left(I_T(\lambda+\nu_{j_1}), I_T(\lambda+\nu_{j_2})\right)\left(\int_\Pi W_T(\nu)d\nu\right)^2 + O\left(\frac{2\pi}{L_T}\right) =$$

$$= \max_{\substack{j_1,j_2 \\ j_1 \neq j_2}} \operatorname{cov}\left(I_T(\lambda+\nu_{j_1}), I_T(\lambda+\nu_{j_2})\right) + O\left(\frac{2\pi}{L_T}\right).$$

Воспользовавшись соотношением (4.12), имеем $S_2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$. Таким образом, теорема доказана.

5.2. Асимптотические свойства моментов вспомогательной статистики $g_T(\lambda)$

Рассмотрим в качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, статистику вида

$$\hat{f}_T(\lambda) = \left(g_T(\lambda)\right)^{\alpha/p}, \tag{5.2.1}$$

$\lambda \in \Pi$, $0 < p < \alpha < 2$, где функцию

$$g_T(\lambda) = \frac{2\pi}{T}\sum_{s=1}^{T} W_T\left(\frac{2\pi s}{T}\right) I_T\left(\lambda + \frac{2\pi s}{T}\right) \tag{5.2.2}$$

будем называть вспомогательной статистикой для оценки спектральной плотности $f(\lambda)$, а $W_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, – спектральное окно. Пусть B_T, $T = 1, 2, \ldots$, – числовая последовательность, для которой $B_T \to 0$, $B_T T \to \infty$ при $T \to \infty$. В качестве $W_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, рассмотрим последовательность функций вида

$$W_T(\lambda) = \frac{1}{B_T}\sum_{j=-\infty}^{\infty} W\left(\frac{1}{B_T}(\lambda + 2\pi j)\right), \tag{5.2.3}$$

где $W(x)$, $x \in R$, – действительная, четная функция, для которой

$$\int_R W(x)dx = 1, \quad \int_R |W(x)|dx < \infty.$$

Исследуем предельное поведение первых двух моментов для статистики (5.2.2).

Теорема 5.2.1. *Если спектральная плотность* $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, *положительна, непрерывна в точке* $\lambda_0 \in \Pi$ *и ограничена на* Π, *то для математического ожидания статистики* $g_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, *определенной равенством* (5.2.2), *справедливо следующее соотношение:*

$$\lim_{T\to\infty} Eg_T(\lambda_0) = \left(f(\lambda_0)\right)^{p/\alpha}, \tag{5.2.4}$$

где $0 < p < \alpha < 2$.

Доказательство. Рассмотрим

$$Eg_T(\lambda_0) = \frac{2\pi}{T}\sum_{s=1}^{T} W_T\left(\frac{2\pi s}{T}\right) EI_T\left(\lambda_0 + \frac{2\pi s}{T}\right)$$

и согласно (3.8) получим

$$Eg_T(\lambda_0) = \frac{2\pi}{T}\sum_{s=1}^{T} W_T\left(\frac{2\pi s}{T}\right)\left[\gamma_T\left(\lambda_0 + \frac{2\pi s}{T}\right)\right]^{\frac{p}{\alpha}}.$$

Воспользовавшись результатами, приведенными в работе [14] (лемма 4.5, с. 111), имеем

$$Eg_T(\lambda_0) = \int_0^{2\pi} W_T(\lambda)\left[\gamma_T(\lambda+\lambda_0)\right]^{p/\alpha} dx + O\left(\frac{1}{T}\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{B_T}\sum_{j=-\infty}^{\infty} W\left[\frac{1}{B_T}(\lambda+2\pi j)\right]\left[\gamma_T(\lambda+\lambda_0)\right]^{p/\alpha} dx + O\left(\frac{1}{T}\right) =$$

$$= \frac{1}{B_T}\int_{-\infty}^{\infty} W\left(\frac{\lambda}{B_T}\right)\left[\gamma_T(\lambda+\lambda_0)\right]^{p/\alpha} dx + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Сделаем замену переменной интегрирования $\frac{\lambda}{B_T} = y$. Тогда

$$Eg_T(\lambda_0) = \int_{-\infty}^{\infty} W(y)\left[\gamma_T(B_T y + \lambda_0)\right]^{p/\alpha} dy + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Используя лемму 2.2.6, получаем

$$\lim_{T\to\infty} Eg_T(\lambda_0) = \left(f(\lambda_0)\right)^{p/\alpha},$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Теорема 5.2.2. *Если спектральная плотность* $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, *положительна, непрерывна на* Π, *выполняется условие* (4.3), *то дисперсия* *статистики* $g_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, *определенной равенством* (5.2.2), *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{T\to\infty} Dg_T(\lambda) = 0, \tag{5.2.5}$$

где $\lambda \in \Pi$, $0 < p < \frac{\alpha}{2} < 1$ *при условии, что* $\int_{-\infty}^{\infty} W^2(x)dx < \infty$.

Доказательство. По определению дисперсии

$$Dg_T(\lambda) = E\left[g_T(\lambda) - Eg_T(\lambda)\right]^2 =$$

$$= \frac{2\pi}{T^2}\sum_{s_1,s_2=1}^{T} W_T\left(\frac{2\pi s_1}{T}\right)W_T\left(\frac{2\pi s_2}{T}\right)E\left[I_T\left(\lambda+\frac{2\pi s_1}{T}\right) - EI_T\left(\lambda+\frac{2\pi s_1}{T}\right)\right]\times$$

$$\times\left[I_T\left(\lambda+\frac{2\pi s_2}{T}\right) - EI_T\left(\lambda+\frac{2\pi s_2}{T}\right)\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{T^2}\sum_{s_1,s_2=1}^{T} W_T\left(\frac{2\pi s_1}{T}\right)W_T\left(\frac{2\pi s_2}{T}\right)\operatorname{cov}\left\{I_T\left(\lambda+\frac{2\pi s_1}{T}\right), I_T\left(\lambda+\frac{2\pi s_2}{T}\right)\right\} =$$

$$= \frac{2\pi}{T^2}\sum_{s=1}^{T} W_T^2\left(\frac{2\pi s_1}{T}\right)DI_T\left(\lambda+\frac{2\pi s}{T}\right) +$$

$$+ \frac{2\pi}{T^2}\sum_{\substack{s_1,s_2=1,\\ s_1\neq s_2}}^{T} W_T\left(\frac{2\pi s_1}{T}\right)W_T\left(\frac{2\pi s_2}{T}\right)\operatorname{cov}\left\{I_T\left(\lambda+\frac{2\pi s_1}{T}\right), I_T\left(\lambda+\frac{2\pi s_2}{T}\right)\right\} = A_1 + A_2.$$

Используя соотношение (4.8) и свойства спектрального окна, получаем, что $A_2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$. Рассмотрим A_1. Учитывая соотношение (3.9), имеем

$$A_1 = \frac{2\pi}{T^2}\left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)} - 1\right)\sum_{s=1}^{T} W_T^2\left(\frac{2\pi s}{T}\right)\left[\gamma_T\left(\lambda+\frac{2\pi s}{T}\right)\right]^{\frac{2p}{\alpha}},$$

где $0 < p < \frac{\alpha}{2} < 1$.

$$A_1 = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)} - 1\right)\int_0^{2\pi}\frac{1}{B_T^2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} W^2\left[\frac{1}{B_T}(x+2\pi j)\right]\left[\gamma_T(x+\lambda)\right]^{\frac{2p}{\alpha}}dx + O\left(\frac{1}{T}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{TB_T^2}\left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)} - 1\right)\int_{-\infty}^{\infty} W^2\left(\frac{x}{B_T}\right)\left[\gamma_T(x+\lambda)\right]^{\frac{2p}{\alpha}}dx + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Сделаем замену переменной интегрирования $\frac{x}{B_T} = y$, тогда

$$A_1 = \frac{2\pi}{TB_T}\left(\frac{k^2(p,\alpha)}{k(2p,\alpha)} - 1\right)\int_{-\infty}^{\infty} W^2(y)\left[\gamma_T(B_T y+\lambda)\right]^{\frac{2p}{\alpha}}dy + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Используя лемму 2.2.6, получим $A_1 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$. Теорема доказана.

5.3. Состоятельность в смысле сходимости по вероятности оценки спектральной плотности

В разделах 5.1 и 5.2 рассматривались вспомогательные статистики $\tilde{f}_T(\lambda)$ и $g_T(\lambda)$, которые представляют собой сглаженную спектральным окном модифицированную периодограмму. Было исследовано асимптотическое поведение первых двух моментов рассматриваемых статистик.

В данном разделе доказывается состоятельность оценки спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, в смысле сходимости по вероятности.

Теорема 5.3.1. *Если спектральная плотность* $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, *положительна на* Π, *непрерывна в точке* $\lambda_0 \in \Pi$, *то статистика* $\hat{f}_T(\lambda)$, *заданная соотношением* (5.1.1), *является состоятельной в смысле сходимости по вероятности оценкой спектральной плотности, то есть*

$$\lim_{T\to\infty} P\left\{\left|\hat{f}_T(\lambda_0) - f(\lambda_0)\right| > \varepsilon\right\} = 0,$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Воспользовавшись неравенством (П.6), получим

$$\left|\hat{f}_T(\lambda_0) - f(\lambda_0)\right| = \left|\left(\tilde{f}_T(\lambda_0)\right)^{\alpha/p} - \left((f(\lambda_0))^{p/\alpha}\right)^{\alpha/p}\right| \le$$

$$\le C(\alpha, p, \lambda_0)\left|\tilde{f}_T(\lambda_0) - (f(\lambda_0))^{p/\alpha}\right|,$$

где

$$C(\alpha,p,\lambda_0) = \frac{\alpha}{2p}\left(\left(\tilde{f}_T(\lambda_0)\right)^{\alpha/p-1} + \left((f(\lambda_0))^{p/\alpha}\right)^{\alpha/p-1}\right)\xrightarrow[T\to\infty]{P}\frac{\alpha}{p}(f(\lambda_0))^{1-p/\alpha}.$$

Учитывая соотношение

$$E\left|\tilde{f}_T(\lambda_0) - (f(\lambda_0))^{p/\alpha}\right|^2 = D\tilde{f}_T(\lambda_0) + \left(E\tilde{f}_T(\lambda_0) - f(\lambda_0)\right)^2,$$

теоремы 5.1.1 и 5.1.2, имеем

$$E\left|\tilde{f}_T(\lambda_0)-(f(\lambda_0))^{p/\alpha}\right|^2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$$

Тогда из неравенства Чебышева, приведенное в [17], следует, что для любого $\varepsilon>0$

$$P\left\{\left|(\hat{f}_T(\lambda_0))-(f(\lambda_0))^{p/\alpha}\right|>\varepsilon\right\}\le\frac{E\left|\left(\tilde{f}_T(\lambda_0)\right)-f(\lambda_0)^{p/\alpha}\right|^2}{\varepsilon^2}\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.3.2. *Если спектральная плотность $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, положительна на Π, непрерывна в точке $\lambda_0\in\Pi$, то статистика $\hat{f}_T(\lambda)$, заданная соотношением (5.2.1), является состоятельной в смысле сходимости по вероятности оценкой спектральной плотности, то есть*

$$\lim_{T\to\infty}P\left\{\left|\hat{f}_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|>\varepsilon\right\}=0,$$

для любого $\varepsilon>0$.

Доказательство теоремы 5.3.2 проводится аналогично доказательству теоремы 5.3.1.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем без доказательства некоторые соотношения и неравенства.

Определение П.1 [2, 3]. *Ядром (ядерной функцией) на Π^n, $n=1,2,\dots$, будем называть периодическую с периодом 2π по каждому аргументу последовательность ограниченных функций $\Phi_T(x_1,\dots,x_n)$, $T=1,2,\dots$, $x_j\in\Pi$, $j=\overline{1,n}$, которые удовлетворяют следующим условиям:*

1. $$\int\limits_{\Pi^n}\dots\int\Phi_T(x_1,\dots,x_n)=1;$$

2. *для любого* $\varepsilon>0$

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_{\Pi^n\setminus A}\dots\int\left|\Phi_T(x_1,\dots,x_n)\right|dx_1\dots dx_n=0,$$

где $A=\left\{(x_1,\dots,x_n):\left|x_j\right|\le\varepsilon,\ j=\overline{1,n}\right\}$;

3. $$\sup_T\int\limits_{\Pi^n}\dots\int\left|\Phi_T(x_1,\dots,x_n)\right|dx_1\dots dx_n=C<\infty,$$

где C – некоторая константа, не зависящая от T.

Лемма П.1 [1]. *Для любых $x,y\in R$ и $0<r\le1$ справедливо неравенство*

$$|x+y|^r\le|x|^r+|y|^r, \tag{П.1}$$

если $1<r\le2$, то

$$|x+y|^r\le2^r\left(|x|^r+|y|^r\right). \tag{П.2}$$

Лемма П.2 [23]. *Для любых $x,y\in R$ и $0<r\le2$ имеет место следующее неравенство*

$$\left||x+y|^r-|y|^r-|x|^r\right|\le2|xy|^{r/2}. \tag{П.3}$$

Лемма П.3 [23]. *Для любых $a,\ b>0$ имеет место неравенство*

$$\left|e^{-a}-e^{-b}\right|\le e^{-b}|a-b|e^{|a-b|}, \tag{П.4}$$

если $a,b\ge0$, то

$$\left|e^{-a}-e^{-b}\right|\le|a-b|. \tag{П.5}$$

Лемма П.4 [23]. *Для любых* $x, y > 0$ *и* $r \in (0,1) \cup (2, +\infty)$ *имеет место неравенство*

$$\left|x^r - y^r\right| \le \frac{r}{2}\left|x - y\right|\left(x^{r-1} + y^{r-1}\right), \qquad (\text{П.6})$$

если $0 < r < 1$ *и* $x, y \ge 0$, *то*

$$\left|x^r - y^r\right| \le \left|x - y\right|^r. \qquad (\text{П.7})$$

Лемма П.5 [23]. *Для любого* $x \in R$ *справедливо следующее тождество*:

$$|x|^p = D^{-1}(p)\,\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp\{iux\}}{|u|^{1+p}}du\right] = D^{-1}(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(xu)}{|u|^{1+p}}du, \qquad (\text{П.8})$$

где

$$D(p) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos u}{|u|^{1+p}}du, \quad 0 < p < 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бари, Н. К.* Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 939 с.
2. *Бенткус, Р. Ю.* Об оптимальных статистических оценках спектральной плотности в L^2 / Р. Ю. Бенткус // Литов. мат. сб. – 1984. – Т. 24, № 3. – С. 51–69.
3. *Бриллинджер, Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория / Д. Бриллинджер. – М. : Мир, 1980. – 536 с.
4. *Гамбровский, Б.* Финансовые модели, использующие устойчивые законы / Б. Гамбровский, С. Рачев // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1995. – Т. 2. Вып. 4. – С. 556–504.
5. *Демеш, Н. Н.* Построение состоятельной оценки спектральной плотности действительного устойчивого процесса / Н. Н. Демеш, Т. В. Соболева // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2003.– № 2. – С. 49–53.
6. *Демеш, Н. Н.* О влиянии гладкости спектральной плотности на величину смещения и состоятельность ее периодограммных оценок / Н. Н. Демеш, Н. Н. Труш // Методы и программное обеспечение обработки информации и прикладного статистического анализа данных на ЭВМ. – Минск : БГУ, 1985. – С. 48–49.
7. *Журбенко, И. Г.* Спектральный анализ временных рядов / И. Г. Журбенко. – М. : Изд-во МГУ, 1982. – 168 с.
8. *Золотарев, В. М.* Одномерные устойчивые распределения / В. М. Золотарев. – М. : Наука, 1983. – 304 с.
9. *Золотарев, В. М.* Устойчивые законы и их применение / В. М. Золотарев. – М. : Знание, 1984. – 63 с.
10. *Золотарев, В. М.* О представлении плотностей устойчивых законов специальными функциями / В. М. Золотарев // Теория вероятностей и ее приложения. – 1994. – № 2. – С. 429–437.
11. *Лукач, Е.* Характеристические функции / Е. Лукач. – М. : Наука, 1979. – 424 с.
12. *Самарский, А. А.* Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.
13. *Соболева, Т. В.* Вычисление первых двух моментов расширенной периодограммы дискретного действительного устойчивого стационарного случайного процесса / Т. В. Соболева // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2001. – № 2. – С. 72–74.

14. *Труш, Н. Н.* Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н. Н. Труш. – Минск : БГУ, 1999. – 217 с.
15. *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. – М. : Мир, 1984. – Т. 1. – 528 с.
16. *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. – М. : Мир, 1984. – Т. 2. – 752 с.
17. *Ширяев, А. Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. – М. : Наука, 1980. – 576 с.
18. *Hosoya, Y.* Harmonizable stable processes / Y. Hosoya // Z. Wahrch. Verw. Geb. – 1982. – Vol. 60. – P. 517–533.
19. *Khindanova, I.* Stable modeling in energy risk management / I. Khindanova, Z. Atakhanova // Math. Methods Oper. Res. Special issue on mathematical models in market and credit risk. – 2002. – № 55 (2). – P. 225–245.
20. *Khindanova, I.* Stable modeling of value at risk / I. Khindanova, S. Rachev, E. Schwartz // Math. Comput. Modelling. – 2001. – № 34 (9–11). – P. 1223–1259.
21. *Cambanis, S.* Complex symmetric stable variables and processes / S. Cambanis // Contributions to Statistics Essays in Honor of Norman L. Johnson. – 1983. – P. 63–79.
22. *McCulloch, J.* Financial applications of stable distributions, in: Statistical methods in Finance / J. McCulloch // Handbook of statistics. – 1996. – Vol. 14. – P. 393–425.
23. *Masry, E.* Spectral density estimation for stationary stable processes / E. Masry, S. Cambanis // Stochastic Processes and Their Applications. – 1984. – Vol. 18, № 18. – P. 1–31.
24. *Nolan, J.* Stable distributions / J. Nolan // Models for Heavy Tailed Data / Math. Stat Department Am. University. – 2002. – P. 1–23.
25. *Soboleva, T. V.* Statistic properties of spectral density estimation of a real stable stationary process /T. V. Soboleva // Computer data analysis and modeling. Robustness and Computer Intensive Methods. Proc. of the 6th Int. Conf. / Belarus State University. – 2001. – P. 232–237.
26. *Trush, N.* Propiedades estatisticas de un proceso discreto, estable y estacionario / N. Trush, N. Demiesh. – Cuba, 1988. – 5 p. – (Preprint / Universidad de Camaguey; Preprint UC–2–F.M).
27. *Uchaikin, V. V.* Change and stability: stable distributions and their applications / V. V Uchaikin, V. M. Zolotarev // Series Modern Probability and Statistics, Utrecht, VSP. – 1999. – P. 533–567.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

R — множество действительных чисел
R^n — n-мерное евклидово пространство
Z — множество целых чисел
N — множество натуральных чисел
$\mathcal{B}(R^n)$ — σ-алгебра борелевских множеств в R^n
Π — $[\pi, \pi]$
$\overset{d}{=}$ — равенство по распределению
$*$ — свертка функций
$\overset{\bullet}{=}$ — асимптотическое равенство
$\xrightarrow{P}$ — символ сходимости случайной величины по вероятности
$f(\lambda)$ — спектральная плотность устойчивого стационарного случайного процесса
$d_T(\lambda)$ — модифицированное конечное преобразование Фурье наблюдений устойчивого стационарного случайного процесса $X(t)$
$I_T(\lambda)$ — модифицированная периодограмма устойчивого стационарного случайного процесса $X(t)$
$EI_T(\lambda)$ — математическое ожидание модифицированной периодограммы
$DI_T(\lambda)$ — дисперсия модифицированной периодограммы
$\hat{f}_T(\lambda)$ — оценка спектральной плотности устойчивого стационарного случайного процесса $X(t)$

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

Труш Николай Николаевич
Соболева Татьяна Валентиновна

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОЦЕНОК СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В авторской редакции

Дизайн обложки *С. Н. Егоровой*
Технический редактор *Г. М. Романчук*
Корректор *Т. М. Турчиняк*
Компьютерная верстка *Т. В. Шестаковой*

Ответственный за выпуск *Т. М. Турчиняк*

Подписано в печать 20.06.2008. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 2,47. Тираж 100 экз. Зак. 963.

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0056804 от 02.03.2004.
220030, Минск, проспект Независимости, 4.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика.
Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
ЛП № 02330/0056850 от 30.04.2004.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.