Н. Н. Труш, Т. В. Соболева

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОЦЕНОК СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Н. Н. Труш, Т. В. Соболева

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОЦЕНОК СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

МИНСК
БГУ
2008

УДК 519.24 (075.8)

Труш, Н. Н. Статистический анализ оценок спектральных плотностей устойчивых случайных процессов / Н. Н. Труш, Т. В. Соболева. – Минск : БГУ, 2008. – 68 с.: ил. – ISBN 978-985-485-993-4.

В монографии изложены основные понятия, определяющие устойчивые стационарные случайные процессы и их спектральное представление. Модифицированное конечное преобразование Фурье и модифицированная периодограмма вводятся как вспомогательные статистики для построения оценок спектральных плотностей устойчивых стационарных случайных процессов. Исследуются их статистические свойства. Строятся оценки спектральных плотностей рассматриваемых процессов и доказывается их состоятельность в смысле сходимости по вероятности.

Предназначено для студентов, аспирантов и научных сотрудников, специализирующихся в прикладной математике, информатике, физике, а также для специалистов, работающих в сфере экономики и финансов.

Ил. 7. Библиогр.: 27 назв.

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *М. А. Маталыцкий*;
кандидат физико-математических наук *С. Л. Чехменок*

ISBN 978-985-485-993-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы наблюдается расширение сфер применения методов статистического анализа временных рядов. Это связано с появлением новых прикладных задач в различных направлениях деятельности человека: финансах, медицине, экономике, биологии и многих других.

Одним из источников важной информации о структуре изучаемого явления и необходимым фактором при решении практических задач являются состоятельные оценки спектральных характеристик временных рядов. Их построение по конечной реализации представляет собой основную задачу в статистическом спектральном анализе временных рядов, последний при этом рассматривается на основе теории стационарных случайных процессов и однородных случайных полей. Среди авторов работ, посвященных данной теории, наиболее известны следующие: Э. Хеннан, Дж. Бокс и Дж. Дженкинс, Ю. Грибанов и В. Мальков, Т. Андерсон, Д. Бриллинджер, И. Журбенко, Н. Труш, М. Ядренко, А. Яглом, Дж. Бендат и А. Пирсол, А. Иванов и Н. Леоненко, С. Марпл-мл. и многие другие.

В настоящее время уделяется большое внимание спектральному анализу устойчивых стационарных случайных процессов и однородных случайных полей, особенностью которых является отсутствие моментов второго, а иногда и первого порядков. В этой связи не представляется возможным непосредственно применить традиционные методы спектрального анализа, а приходится разрабатывать новые подходы и методы для исследования таких процессов и полей.

Основы теории устойчивых распределений были заложены в 1920 году П. Леви. Отсутствие явных выражений для плотностей и функций распределения устойчивых распределений (за исключением гауссовского, Коши и Леви) до последнего времени являлось основным препятствием при использовании практиками устойчивых распределений. Однако в настоящее время при исследовании финансовых и экономических моделей, в биологии, физике и астрономии появляются практические задачи, использующие устойчивые распределения. Среди них только нормальное распределение имеет конечную дисперсию, а гауссовские процессы изучены достаточно полно.

Создание теории устойчивых стационарных процессов и однородных случайных полей стало возможным благодаря результатам исследований устойчивых распределений, среди которых можно выделить работы В. Золотарева, Е. Лукача, Б. Гамбровского и С. Рачева, О. Маслова, В. Палаускаса, И. Баниса, Г. Саковича, С. Пресса, Б. Силва и др. В монографиях В. Золотарева [8, 9] были впервые систематически изложены наиболее существенные результаты о свойствах устойчивых распределений, а также даны примеры использования устойчивых законов на практике. Стоит отметить, что в более поздних статьях Дж. Нолана, например, в [24], также приводятся сведения об одномерных и многомерных устойчивых распределениях и делается акцент на их практическом применении. В работах Б. Гамбровского и С. Рачева [4], Дж. Маккалоча [22], В. Учайкина и В. Золотарева [27], а также И. Хиндановой и З. Астаховой [19], И. Хиндановой, С. Рачева и Е. Шварца [20] обосновывается применение устойчивых распределений при исследовании финансовых временных рядов.

Понятие спектральной плотности симметричного комплекснозначного устойчивого стационарного случайного процесса с непрерывным временем впервые было введено в работе Е. Масри и С. Камбаниса [23], которые исследовали статистические свойства построенной оценки спектральной плотности и доказали ее состоятельность в смысле сходимости по вероятности. Эти исследования нашли свое продолжение в работах Н. Демеша и Н. Труша [6, 26], которыми было введено понятие спектральной плотности симметричного комплекснозначного устойчивого стационарного случайного процесса с дискретным временем, построена оценка спектральной плотности на основе модифицированной периодограммы с различными окнами просмотра данных, доказана ее состоятельность в смысле сходимости по вероятности и исследована скорость сходимости моментов модифицированной периодограммы для случая полиномиальных окон просмотра данных при ограничениях на гладкость спектральной плотности.

Настоящая книга посвящена статистическому спектральному анализу комплекснозначных и действительных симметричных устойчивых стационарных случайных процессов с дискретным временем.

Она предназначена как для студентов и аспирантов, обучающихся по специальностям, которые связаны с математикой, экономикой, так и для ученых других естественнонаучных специальностей, использующих методы статистического спектрального анализа устойчивых стационарных случайных процессов на практике.

Авторы благодарны рецензентам: профессору, доктору физико-математических наук М. А. Маталыцкому и кандидату физико-математических наук С. Л. Чехменку за конструктивные рекомендации и пожелания.

С советами, замечаниями по содержанию данной монографии просим обращаться по адресу: факультет прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет, проспект Независимости, 4. 220030, Минск, Республика Беларусь, или по электронной почте: TroushNN@bsu.by и Soboleva@bsu.by.

ГЛАВА 1

УСТОЙЧИВЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ПРОЦЕССЫ

1.1. Определение устойчивых случайных величин

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Пусть ξ – случайная величина, заданная на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ с функцией распределения $F_\xi(x)$, $x \in R$, плотностью распределения $p_\xi(x)$, $x \in R$, характеристической функцией $\varphi_\xi(t)$, $t \in R$, а $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ с функциями распределения $F_{\xi_i}(x)$, $x \in R$, плотностями распределения $p_{\xi_i}(x)$, $x \in R$, характеристическими функциями $\varphi_{\xi_i}(t)$, $t \in R$, $i = 1, 2, \ldots$, причем $F_\xi(x) = F_{\xi_i}(x)$, $p_\xi(x) = p_{\xi_i}(x)$, $\varphi_\xi(t) = \varphi_{\xi_i}(t)$, $x \in R$, $t \in R$, $i = 1, 2, \ldots$.

Определение 1.1.1. *Случайная величина ξ, ее функция распределения $F_\xi(x)$, $x \in R$, плотность распределения $p_\xi(x)$, $x \in R$, характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$, $t \in R$, называются устойчивыми (устойчивыми в широком смысле), если для каждого m, $m = 1, 2, \ldots$, существуют такие постоянные $c_m > 0$ и $\gamma_m \in R$, что*

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \overset{d}{=} c_m \xi + \gamma_m, \tag{1.1.1}$$

$$F_{\xi_1} * \ldots * F_{\xi_m}(x) = F_\xi\left(\frac{x - \gamma_m}{c_m}\right), \tag{1.1.2}$$

$$p_{\xi_1} * \ldots * p_{\xi_m}(x) = p_\xi\left(\frac{x - \gamma_m}{c_m}\right), \tag{1.1.3}$$

$$\prod_{i=1}^{m} \varphi_{\xi_i}(t) = \varphi_\xi(c_m t) \exp\{i\gamma_m t\}, \tag{1.1.4}$$

где $x \in R$, $t \in R$.

Определение 1.1.2. *Говорят, что случайная величина ξ, ее функция распределения $F_\xi(x)$, $x \in R$, плотность распределения $p_\xi(x)$, $x \in R$, характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$, $t \in R$, имеют строго устойчивое распределение (устойчивое в узком смысле), если в соотношениях* (1.1.1) – (1.1.4) $\gamma_m = 0$.

Известно из работ [15, 16], что постоянные c_m, $m = 1, 2, \ldots$, в равенствах (1.1.1) – (1.1.4) имеют вид $c_m = m^{1/\alpha}$, где $\alpha \in (0, 2]$.

Теорема 1.1.1. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины и*

$$\eta_m = \frac{\sum_{i=1}^{m} \xi_i - \gamma_m}{c_m}, \tag{1.1.5}$$

где $c_m, \gamma_m \in R$, $c_m > 0$, тогда каждая функция распределения $F_\xi(x)$, $x \in R$, является слабым пределом функций распределения $F_{\eta_m}(x)$, $x \in R$, при $m \to \infty$, тогда и только тогда, когда ξ устойчивая случайная величина.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и выполнено (1.1.1). Покажем, что ξ является устойчивой случайной величиной. Если ξ – вырожденная случайная величина $(P\{\xi = \mathrm{const}\} = 1)$, то она, очевидно, устойчива. Поэтому предположим, что ξ является невырожденной.

Зафиксируем $k \geq 1$ и обозначим

$$S_m^{(1)} = \xi_1 + \ldots + \xi_m,\ S_m^{(2)} = \xi_{m+1} + \ldots + \xi_{2m},\ \ldots,\ S_m^{(k)} = \xi_{(k-1)m+1} + \ldots + \xi_{km},$$

$$\eta_m^{(1)} = \frac{S_m^{(1)} - \gamma_m}{c_m},\ \ldots,\ \eta_m^{(k)} = \frac{S_m^{(k)} - \gamma_m}{c_m}.$$

Величины $\eta_m^{(1)}, \ldots, \eta_m^{(k)}$ совпадают по распределению, так как

$$\eta_m^{(i)} \xrightarrow{d} \eta^{(i)} \overset{d}{=} \xi,\ m \to \infty,\ i = 1, \ldots, k.$$

Обозначим

$$U_m^{(k)} = \eta_m^{(1)} + \ldots + \eta_m^{(k)},$$

тогда

$$U_m^{(k)} \xrightarrow{d} \eta^{(1)} + \ldots + \eta^{(k)},$$

где $\eta^{(1)} \overset{d}{=} \ldots \overset{d}{=} \eta^{(k)} \overset{d}{=} \xi$.

С другой стороны,

$$U_m^{(k)} = \frac{\xi_1 + ... + \xi_{km} - k\gamma_m}{c_m} = \frac{c_{km}}{c_m}\left(\frac{\xi_1 + ... + \xi_{km} - \gamma_{km}}{c_{km}}\right) + \frac{\gamma_{km} - k\gamma_m}{c_m} =$$

$$= a_m^{(k)} V_{km} + b_m^{(k)}, \quad (1.1.6)$$

где

$$a_m^{(k)} = \frac{c_{km}}{c_m},\ V_{km} = \frac{\xi_1 + ... + \xi_{km} - \gamma_{km}}{c_{km}},\ b_m^{(k)} = \frac{\gamma_{km} - k\gamma_m}{c_m}.$$

Из (1.1.6) следует, что

$$V_{km} = \frac{U_m^{(k)} - b_m^{(k)}}{a_m^{(k)}},$$

где $U_m^{(k)} \xrightarrow{d} \eta^{(1)} + ... + \eta^{(k)}$, $V_{km} \xrightarrow{d} \xi$, при $m \to \infty$, и, следовательно, найдутся константы $a_k > 0$ и b_k, что $a_m^{(k)} \to a_k$, $b_m^{(k)} \to b_k$, при $m \to \infty$. Тогда

$$\frac{\eta^{(1)} + ... + \eta^{(k)} - b_k}{a_k} \stackrel{d}{=} \xi,$$

откуда и следует, что ξ – устойчивая случайная величина.

Достаточность. Если ξ устойчивая случайная величина, то из равенства (1.1.1) следует, что

$$\xi \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{m} \xi_i - \gamma_m}{c_m}$$

и, следовательно, соотношение (1.1.5) выполняется. Теорема доказана.

При исследовании устойчивых распределений удобно использовать аппарат характеристических функций. Так, из работ [8, 11] известно, что для того чтобы случайная величина ξ была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы логарифм ее характеристической функции $\varphi_\xi(t)$ имел представление

$$\ln \varphi_\xi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right] + i\mu t, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ -\sigma|t|\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(t)\ln|t|\right] + i\mu t, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases} \quad (1.1.7)$$

где $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $\sigma > 0$, $\mu \in R$, $t \in R$.

Таким образом, класс устойчивых распределений представляет собой четырехпараметрическое семейство с параметрами: α – характеристический показатель, β – параметр асимметрии, σ – параметр масштаба, μ – параметр положения. Параметр α характеризует степень убывания плотности распределения устойчивого закона $p_\xi(x)$ при $|x| \to \infty$. Случайная величина ξ имеет моменты лишь порядка p, где $0 < p < \alpha < 2$, а при $\alpha = 2$ она является нормально распределенной случайной величиной.

Параметр β характеризует степень асимметричности распределения. Если $\beta = 0$, то распределение симметрично. При $\beta > 0$ $(\beta < 0)$ распределение сдвинуто влево (вправо) и становится более асимметричным при $|\beta| \to 1$.

При $\alpha > 1$ параметр μ совпадает с математическим ожиданием случайной величины ξ, а если $\alpha \le 1$, то в этом случае $E\xi = \infty$ и параметр μ не имеет смысла математического ожидания. Однако, если в этом случае $\beta = 0$, то параметр μ совпадает с медианой распределения.

Параметр σ играет роль масштабного множителя. Это связано с тем, что любая устойчивая случайная величина ξ может быть представлена в виде $\xi = \sigma\xi_0$, где ξ_0 – случайная величина с теми же параметрами α, β, μ, что и ξ, но $\sigma = 1$.

Для устойчивой случайной величины ξ, имеющей логарифм характеристической функции вида (1.1.7), будем использовать обозначение $\xi \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$.

Если в соотношении (1.1.7) $\beta = 0$, то устойчивые распределения называют симметричными. Логарифм характеристической функции таких распределений имеет вид

$$\ln \varphi_\xi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha + i\mu t, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ -\sigma|t| + i\mu t, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases}$$

Определение 1.1.3. *Говорят, что случайная величина* ξ *имеет строго устойчивое симметричное распределение с характеристическим показателем* α, $\alpha \in (0, 2]$, *если в равенстве* (1.1.7) $\mu = 0$ *для* $\alpha \neq 1$, *и* $\beta = 0$ *для* $\alpha = 1$.

Отметим некоторые свойства устойчивых случайных величин. Устойчивые распределения обладают свойством аддитивности, т. е. линейная комбинация устойчивых случайных величин с одним и тем же характеристическим показателем α будет являться устойчивой случайной величиной с тем же показателем α, $\alpha \in (0,2]$. Название устойчивого закона распределения в некоторой степени вытекает из этого свойства относительно операции сложения.

Теорема 1.1.2. *Если $\xi_1,...,\xi_n$ – независимые устойчивые случайные величины с одним и тем же характеристическим показателем α, $\alpha \in (0,2]$, причем $\xi_i \sim S_\alpha(\beta_i,\sigma_i,\mu_i)$, $i=\overline{1,n}$, и с характеристической функцией* (1.1.7), *то*

$$\xi_1+\xi_2+...+\xi_n \sim S_\alpha(\beta,\sigma,\mu),$$

где

$$\sigma=\left(\sigma_1^\alpha+...+\sigma_n^\alpha\right)^{1/\alpha},$$

$$\beta=\sigma^{-\alpha}\left(\sigma_1^\alpha\beta_1+...+\sigma_n^\alpha\beta_n\right),$$

$$\mu=\mu_1+...+\mu_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство будем проводить, воспользовавшись методом математической индукции. Рассмотрим $\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)$.

1) Если $\alpha \neq 1$, то

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)=\varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t)=$$

$$=\exp\left\{-|t|^\alpha\left[(\sigma_1^\alpha+\sigma_2^\alpha)-i(\sigma_1^\alpha\beta_1+\sigma_2^\alpha\beta_2)\operatorname{sign}(t)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right]+i(\mu_1+\mu_2)t\right\};$$

2) Если $\alpha=1$, то

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)=\varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t)=$$

$$=\exp\left\{-|t|\left[(\sigma_1^\alpha+\sigma_2^\alpha)+i(\sigma_1^\alpha\beta_1+\sigma_2^\alpha\beta_2)\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(t)\ln|t|\right]+i(\mu_1+\mu_2)t\right\}.$$

Далее получим:

1) Если $\alpha \neq 1$, то

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)=$$

$$=\exp\left\{-|t|^\alpha(\sigma_1^\alpha+\sigma_2^\alpha)\left[1-i\frac{\sigma_1^\alpha\beta_1+\sigma_2^\alpha\beta_2}{\sigma_1^\alpha+\sigma_2^\alpha}\operatorname{sign}(t)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right]+i(\mu_1+\mu_2)t\right\};$$

2) Если $\alpha=1$, то

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)=$$

$$=\exp\left\{-|t|(\sigma_1^\alpha+\sigma_2^\alpha)\left[1+i\frac{\sigma_1^\alpha\beta_1+\sigma_2^\alpha\beta_2}{\sigma_1^\alpha+\sigma_2^\alpha}\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(t)\ln|t|\right]+i(\mu_1+\mu_2)t\right\}.$$

Таким образом, $\xi_1+\xi_2 \sim S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)$, где

$$\sigma=\left(\sigma_1^\alpha+\sigma_2^\alpha\right)^{1/\alpha},\ \beta=\frac{\sigma_1^\alpha\beta_1+\sigma_2^\alpha\beta_2}{\sigma_1^\alpha+\sigma_2^\alpha},\ \mu=\mu_1+\mu_2. \quad (1.1.8)$$

Итак, утверждение теоремы имеет место при $k=2$. Предположим, что теорема справедлива при $k=n-1$, тогда

$$Z_{n-1}=\xi_1+\xi_2+...+\xi_{n-1} \sim S_\alpha(\beta_0,\sigma_0,\mu_0),$$

причем

$$\sigma_0=\left(\sigma_1^\alpha+...+\sigma_{n-1}^\alpha\right)^{1/\alpha},$$

$$\beta_0=\sigma^{-\alpha}\left(\sigma_1^\alpha\beta_1+...+\sigma_{n-1}^\alpha\beta_{n-1}\right),$$

$$\mu_0=\mu_1+...+\mu_{n-1}.$$

Докажем, что теорема справедлива для $k=n$. Из (1.1.8) получим

$$\xi_1+\xi_2+...+\xi_n=Z_{n-1}+\xi_n \sim S_\alpha(\beta,\sigma,\mu),$$

где

$$\sigma=\left(\sigma_0^\alpha+\sigma_n^\alpha\right)^{1/\alpha}=\left(\sigma_1^\alpha+...+\sigma_n^\alpha\right)^{1/\alpha},$$

$$\beta=\frac{\sigma_0^\alpha\beta_0+\sigma_n^\alpha\beta_n}{\sigma_0^\alpha+\sigma_n^\alpha}=\frac{\sigma_1^\alpha\beta_1+...+\sigma_n^\alpha\beta_n}{\sigma_1^\alpha+...+\sigma_n^\alpha}=\sigma^{-\alpha}\left(\sigma_1^\alpha\beta_1+...+\sigma_n^\alpha\beta_n\right),$$

$$\mu=\mu_0+\mu_n=\mu_1+...+\mu_n.$$

Теорема доказана.

Обобщая теорему 1.1.2, имеем следующий результат.

Теорема 1.1.3. *Пусть $\xi_1,...,\xi_n$ – независимые устойчивые случайные величины с одним и тем же характеристическим показателем α, $\alpha \in (0,2]$, причем $\xi_i \sim S_\alpha(\beta_i,\sigma_i,\mu_i)$, $i=\overline{1,n}$, тогда случайная величина ξ, такая что $\xi=a_1\xi_1+a_2\xi_2+...+a_n\xi_n$, где $a_i \in R$, $i=\overline{1,n}$, является устойчивой с характеристическим показателем α, причем $\xi \sim S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)$, а параметры β, σ, μ определяются следующими соотношениями:*

$$\sigma=\left(|a_1|^\alpha\sigma_1^\alpha+...+|a_n|^\alpha\sigma_n^\alpha\right)^{1/\alpha},$$

$$\beta=\sigma^{-\alpha}\left(\sigma_1^\alpha\beta_1|a_1|^\alpha\operatorname{sign}a_1+...+\sigma_n^\alpha\beta_n|a_n|^\alpha\operatorname{sign}a_n\right),$$

$$\mu=\mu_1a_1+...+\mu_na_n+\overline{b},$$

где $\overline{b}=0$, если $\alpha \neq 1$ и $\overline{b}=-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\beta_ja_j\ln|a_j|$, если $\alpha=1$.

Далее заметим, что из представления характеристической функции (1.1.7) нетрудно получить

$$\left|\varphi_\xi(t)\right| = e^{-\sigma^\alpha |t|^\alpha},$$

где $t \in R$, откуда вытекает, что характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$, $t \in R$, случайной величины ξ абсолютно интегрируема на R и, следовательно, на основании теоремы обращения существуют плотность распределения $p_\xi(x)$, $x \in R$, и любые ее производные, которые равномерно ограничены на всей оси.

В дальнейшем, если не оговорено особо, будем рассматривать строго симметричные устойчивые случайные величины ξ, характеристические функции которых представимы в виде

$$\varphi_\xi(t) = \exp\left\{-c|t|^\alpha\right\},$$

$c > 0$ – некоторая постоянная, $t \in R$, $\alpha \in (0, 2]$.

Определение 1.1.4. *Устойчивую случайную величину ξ, логарифм характеристической функции которой представим в виде* (1.1.7), *называют стандартной, если $\mu = 0$, $\sigma = 1$.*

В работе [10] показано, что плотности распределения устойчивых случайных величин можно представить специальными функциями. Явные выражения плотностей распределения известны лишь при $\alpha = 1/2;\ 1;\ 2$. Приведем их (см. [11], рис. 1.1 – 1.3).

1. Распределение Леви:

$$p_\xi(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}\frac{1}{(x-\mu)^{3/2}}}\exp\left(-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right),\ \mu < x < \infty,\ \sigma > 0,\ \mu \in R.$$

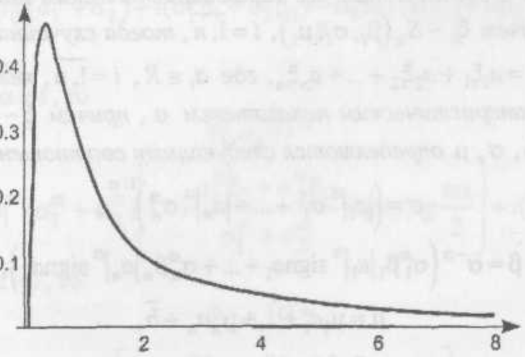


Рис. 1.1. График плотности распределения случайной величины $\xi \sim S_{1/2}(1, 1, 0)$

2. Распределение Коши:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}\right),\ x \in R,\ \sigma > 0,\ \mu \in R.$$

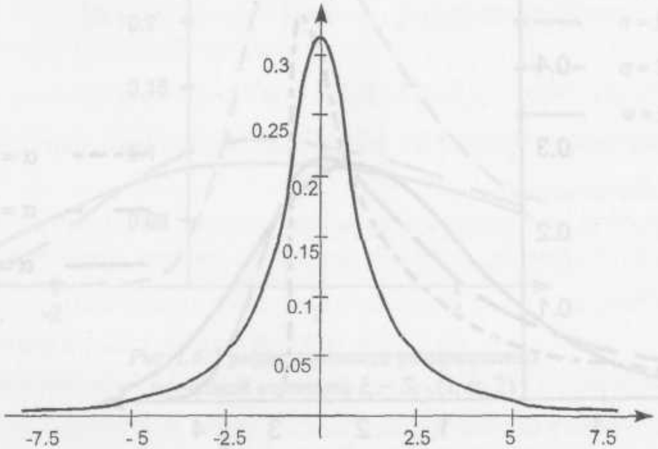


Рис. 1.2. График плотности распределения случайной величины $\xi \sim S_1(0, 1, 0)$

3. Распределение Гаусса:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),\ x \in R,\ \sigma > 0,\ \mu \in R.$$

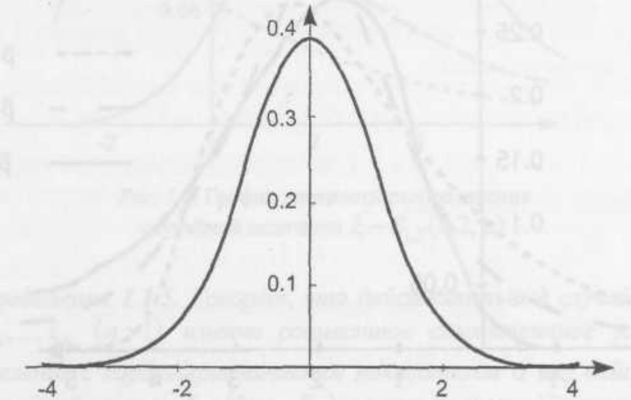


Рис. 1.3. График плотности распределения случайной величины $\xi \sim S_2(0, 1, 0)$

Приведем примеры графиков плотностей устойчивых распределений для различных параметров α, β, μ, σ (рис. 1.4 – 1.7).

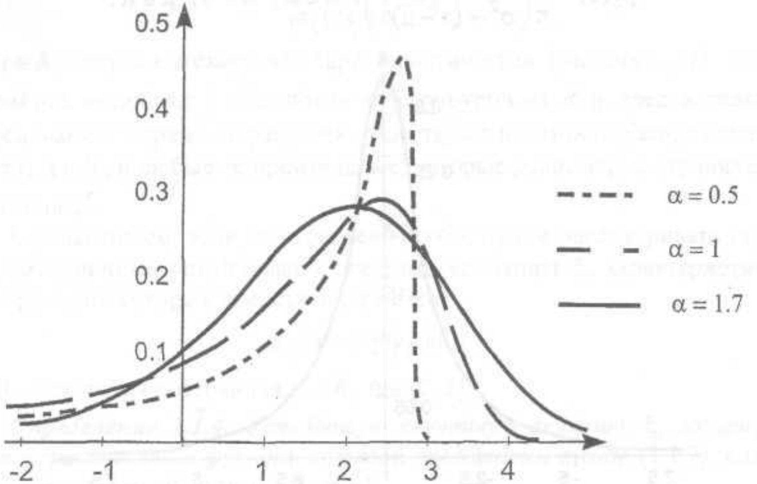


Рис. 1.4. График плотности распределения случайной величины $\xi \sim S_{\alpha}(-1, 1, 2)$

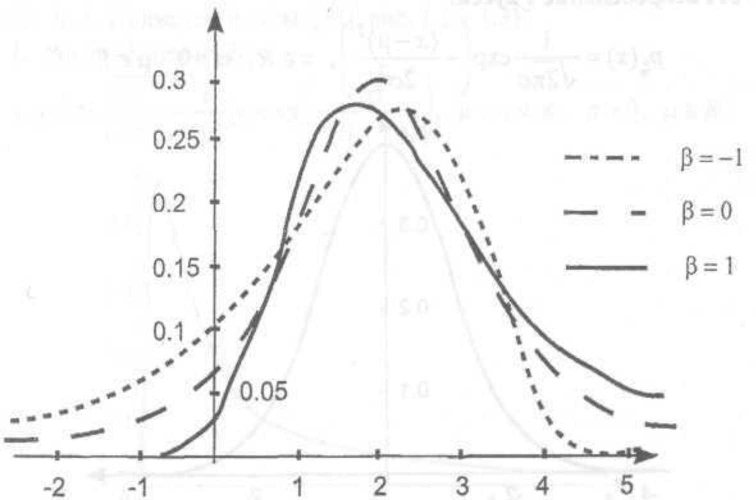


Рис. 1.5. График плотности распределения случайной величины $\xi \sim S_{1,2}(\beta, 1, 2)$

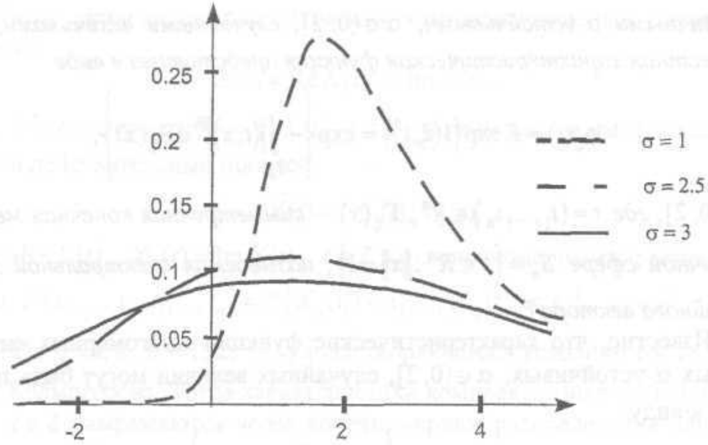


Рис. 1.6. График плотности распределения случайной величины $\xi \sim S_{1,2}(1, \sigma, 2)$

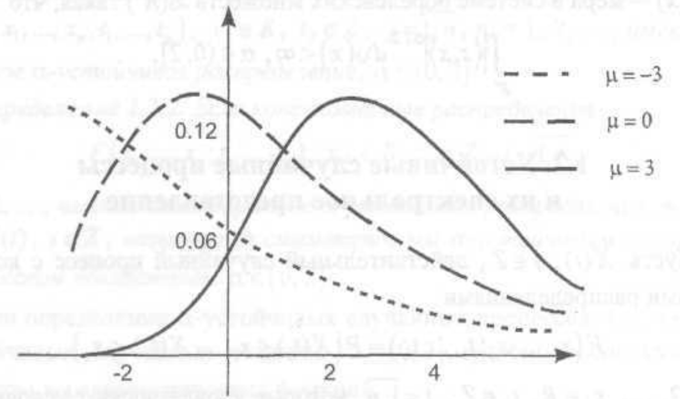


Рис. 1.7. График плотности распределения случайной величины $\xi \sim S_{1,2}(1, 2, \mu)$

Определение 1.1.5. *Говорят, что действительные случайные величины* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ $(n > 1)$ *имеют совместное симметричное устойчивое распределение с характеристическим показателем* α *или действительный случайный вектор* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *является* α*-устойчивым, если все линейные комбинации* $a_1\xi_1 + \ldots + a_n\xi_n$, *где* $a_k \in R$, $k = \overline{1, n}$, *являются сим-*

метричными α-устойчивыми, $\alpha \in (0, 2]$, случайными величинами, а их совместная характеристическая функция представима в виде

$$\varphi_\xi(t) = E\exp\{i\langle\xi,t\rangle\} = \exp\left\{-\int_{S_n} |\langle t,x\rangle|^\alpha \, d\Gamma_\xi(x)\right\},$$

$\alpha \in (0, 2]$, где $t = (t_1, ..., t_n) \in R^n$, $\Gamma_\xi(x)$ – симметричная конечная мера на единичной сфере $S_n = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$, называемая спектральной мерой случайного вектора ξ.

Известно, что характеристические функции многомерных симметричных α-устойчивых, $\alpha \in (0, 2]$, случайных величин могут быть приведены к виду

$$\varphi_\xi(t) = \exp\left\{-\int_{R^n} |\langle t,x\rangle|^\alpha \, d\upsilon(x)\right\},$$

где $\upsilon(x)$ – мера в системе борелевских множеств $\mathcal{B}(R^n)$ такая, что

$$\int_{R^n} |\langle x,x\rangle|^{\alpha/2} \, d\upsilon(x) < \infty, \ \alpha \in (0, 2].$$

1.2. Устойчивые случайные процессы и их спектральное представление

Пусть $X(t)$, $t \in Z$, действительный случайный процесс с конечномерными распределениями

$$F(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = P\{X(t_1) < x_1, ..., X(t_n) < x_n\},$$

$n = 1, 2, \ldots$, $x_j \in R$, $t_j \in Z$, $j = \overline{1, n}$, которые удовлетворяют условиям согласованности Колмогорова [17]:

$$F(x_1, ..., x_{k-1}, +\infty, x_{k+1}, ..., x_n; t_1, ..., t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, ..., t_n) =$$
$$= F(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n; t_1, ..., t_{k-1}, t_{k+1}, ..., t_n),$$
$$F(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = F(x_{i_1}, ..., x_{i_n}; t_{i_1}, ..., t_{i_n}),$$

где $x_j \in R$, $t_j \in Z$, $j = \overline{1, n}$, $n = 1, 2, \ldots$, а $(i_1, ..., i_n)$ – произвольная перестановка индексов $(1, ..., n)$.

Часто приходится рассматривать комплекснозначные случайные процессы

$$X(t) = \operatorname{Re} X(t) + i \operatorname{Im} X(t),$$

$t \in Z$. В этом случае процесс $X(t)$, $t \in Z$, можно рассматривать как двумерный действительный процесс

$$\overline{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t)\},$$

$X_1(t) = \operatorname{Re} X(t)$, $X_2(t) = \operatorname{Im} X(t)$, $t \in Z$, с конечномерными распределениями $F(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = P\{X_{i_1}(t_1) < x_1, ..., X_{i_n}(t_n) < x_n\}$, $x_j \in R$, $t_j \in Z$, $i_j = \{1, 2\}$, $j = \overline{1, n}$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющими условиям согласованности Колмогорова. Тогда характеристики комплекснозначного процесса $X(t)$, $t \in Z$, выражаются через конечномерные распределения действительного двумерного процесса $\overline{X}(t)$, $t \in Z$.

Определение 1.2.1. *Случайный процесс $X(t)$, $t \in Z$, называется α-устойчивым случайным процессом, если его конечномерные распределения $F(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n)$, $x_j \in R$, $t_j \in Z$, $j = \overline{1, n}$, $n = 1, 2, \ldots$, имеют совместное α-устойчивое распределение, $\alpha \in (0, 2]$.*

Определение 1.2.2. *Если конечномерные распределения*

$$F(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n), \ x_j \in R, \ t_j \in Z, \ j = \overline{1, n},$$

$n = 1, 2, \ldots$, имеют симметричное α-устойчивое распределение, то процесс $X(t)$, $t \in Z$, называется симметричным α-устойчивым с характеристическим показателем $\alpha \in (0, 2]$.

При определении α-устойчивых случайных процессов, так же как и α-устойчивых случайных величин, $\alpha \in (0, 2]$, удобно воспользоваться аппаратом характеристических функций.

Определение 1.2.3. *Говорят, что задан дискретный симметричный α-устойчивый случайный процесс $X(t)$, $t \in Z$, если для любого конечного множества индексов $J = \{l_1, l_2, ..., l_n\}$, где $l_j \in N = \{1, 2, ...\}$, $j = \overline{1, n}$, причем $l_j \neq l_k$, $(j \neq k)$, характеристическая функция $\varphi_{l_1, ..., l_n}(t_1, ..., t_n)$ представима в виде*

$$\varphi_{l_1, ..., l_n}(t_1, ..., t_n) = \exp\left\{-\int_{R^n} \left|\sum_{j \in J} t_j x_j\right|^\alpha d\upsilon_J(x)\right\},$$

где $x_j \in R$, $j=\overline{1,n}$, υ_J *– мера, определенная на* $\mathcal{B}(R^n)$ *таким образом, что*

$$\int_{R^n}\left|\sum_{j\in J}x_j^2\right|^{\alpha/2}d\upsilon_J(x)<\infty,$$

$\alpha\in(0,2]$, $x\in R^n$, *и класс характеристических функций* $\{\varphi_{l_1,\dots,l_n}(t_1,\dots,t_n)\}$ *является согласованным, то есть выполняются следующие условия Колмогорова:*

1) *если* $\{k_1,\dots,k_n\}$ *– произвольная перестановка чисел* $\{1,\dots,n\}$, *то*

$$\varphi_{l_1,\dots,l_n}(t_1,\dots,t_n)=\varphi_{l_{k_1},\dots,l_{k_n}}(t_{k_1},\dots,t_{k_n});$$

2) $\varphi_{l_1,\dots,l_{i-1},l_i,l_{i+1},\dots,l_n}(t_1,\dots,t_i,0,\dots,0)=\varphi_{l_1,\dots,l_i}(t_1,\dots,t_i)$, *для* $i<n$.

Определение 1.2.4. *Дискретный* α*-устойчивый случайный процесс* $X(t)$, $t\in Z$, *называют стационарным в узком смысле или просто стационарным, если для любого натурального* n, $n>1$, *произвольного набора чисел* $\{t_1,\dots,t_n\}$, $t_j\in Z$, $j=\overline{1,n}$, *и любого* t, $t\in Z$,

$$F(x_1,\dots,x_n;t_1+t,\dots,t_n+t)=F(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n),$$

$x_j\in R, j=\overline{1,n}$.

Аналогично, как и в работах [18, 21], рассмотрим комплекснозначный симметричный устойчивый случайный процесс с показателем α, $\alpha\in(0,2]$, имеющий спектральное представление вида

$$X(t)=\int_\Pi \exp\{it\lambda\}d\xi(\lambda), \tag{1.2.1}$$

где $t\in Z$, $\xi(\lambda)$ – комплекснозначный устойчивый случайный процесс с независимыми приращениями, такой, что

$$\left\{E|d\xi(\lambda)|^p\right\}^{\alpha/p}=C(p,\alpha)f(\lambda)d\lambda \tag{1.2.2}$$

для $p\in(0,\alpha)$, причем постоянная $C(p,\alpha)$ зависит только от p и α, а функция $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, называется спектральной плотностью процесса $X(t), t\in Z$.

При $\alpha=2$ устойчивый процесс $X(t)$, $t\in Z$, является гауссовским, а функция $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, – обычной спектральной плотностью, и в этом случае для исследования процесса $X(t)$, $t\in Z$, применим традиционный спектральный анализ. При $\alpha\in(0,2)$ функция $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, не является спектральной плотностью в обычном смысле, но при решении задач линейного прогнозирования и фильтрации играет ту же роль, что и спектральная плотность процессов с конечными вторыми моментами.

Интеграл в равенстве (1.2.1) понимается в смысле сходимости в среднем порядка p, $p\in(0,\alpha)$, и, согласно [14, 23], для любого натурального n

$$E\exp\left\{i\mathrm{Re}\sum_{k=1}^n r_kX(t_k)\right\}=\exp\left\{-c_\alpha\int_\Pi\left|\sum_{k=1}^n r_k\exp\{iut_k\}\right|^\alpha f(u)du\right\}, \tag{1.2.3}$$

где

$$c_\alpha=\frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}>0, \tag{1.2.4}$$

а $\alpha\in(0,2)$, $r_k\in R$, $t_k\in Z$, $k=\overline{1,n}$, $\Gamma(x)$ – гамма-функция от x.

Рассмотрим r-мерный, $r=2,3,\dots$, случайный процесс с дискретным временем $X^r(t)=\{X_a(t),\ a=\overline{1,r}\}$, $t\in Z$, конечномерными распределениями

$$F_{a_1,\dots,a_n}(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)=P\{X_{a_1}(t_1)<x_1,\dots,X_{a_n}(t_n)<x_n\},$$

$a_j=\overline{1,r}$, $x_j\in R$, $t_j\in Z$, $j=\overline{1,n}$, $n=1,2,\dots$, удовлетворяющими условиям согласованности Колмогорова.

Определение 1.2.5. *Будем называть случайный процесс* $X^r(t)$, $t\in Z$, $r=2,3,\dots$, *устойчивым случайным процессом с показателем* α, $\alpha\in(0,2]$, *если его конечномерные распределения имеют совместное* α*-устойчивое распределение,* $\alpha\in(0,2]$.

Определение 1.2.6. *Говорят, что* α*-устойчивый случайный процесс* $X^r(t)$, $t\in Z$, $r=2,3,\dots$, *называется стационарным в узком смысле или просто стационарным, если для любого* $n\in N$, *и любых точек* t, $t_j\in Z$,

$$F_{a_1,\dots,a_n}(x_1,\dots,x_n;t_1+t,\dots,t_n+t)=F_{a_1,\dots,a_n}(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n),$$

$x_j\in R$, $a=\overline{1,t}$, $j=\overline{1,n}$.

В наших обозначениях $X^1(t)=X(t)$, где $X(t)$, $t\in Z$, – устойчивый случайный процесс с дискретным временем.

Спектральное представление составляющей $X_a(t)$, $a=\overline{1,r}$, случайного процесса $X^r(t)$, $t \in Z$, $r = 2, 3, \ldots$, имеет вид

$$X_a(t) = \int_{\Pi} \exp\{it\lambda\} d\xi_a(\lambda),$$

где $\xi_a(\lambda)$ – составляющая α-устойчивого случайного процесса $\xi^r(\lambda) = \{\xi_a(\lambda),\ a=\overline{1,r}\}$, $\lambda \in Z$, $r = 2, 3, \ldots$, с независимыми приращениями такого, что

$$\left\{E\left|d\xi_a(\lambda)d\xi_b(\lambda)\right|^{p/2}\right\}^{\alpha/p} = C(p,\alpha) f_{ab}(\lambda)d\lambda,$$

для всех $0<p<\alpha$, причем $C(p,\alpha)$ зависит от p, α и не зависит от $\xi_a(\lambda)$ и $\xi_b(\lambda)$, $a,b=\overline{1,r}$. Если $a = b$, то имеем представление (1.2.2). Функцию $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in Z$, $a,b=\overline{1,r}$, будем называть взаимной спектральной плотностью составляющих $X_a(t)$ и $X_b(t)$ процесса $X^r(t)$, $t \in Z$.

Если рассматриваемый процесс $X(t)$, $t \in Z$, является действительным симметричным α-устойчивым, $\alpha \in (0,2]$, случайным процессом с дискретным временем, то согласно [14] его спектральное представление имеет вид

$$X(t) = \int_{\Pi} \cos(\lambda t) d\xi(\lambda), \qquad (1.2.5)$$

где $t \in Z$, $\xi(\lambda)$ – действительный устойчивый случайный процесс с независимыми приращениями такой, что

$$\left\{E\left|d\xi(\lambda)\right|^{p}\right\}^{\alpha/p} = C(p,\alpha) f(\lambda)d\lambda, \qquad (1.2.6)$$

функция $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, называется спектральной плотностью процесса $X(t)$, $t \in Z$, $0<p<\alpha\le 2$. Постоянная $C(p,\alpha)$, как и в случае комплекснозначного процесса, зависит только от p и α и не зависит от свойств процесса $X(t)$, $t \in Z$. Если $\alpha = 2$, то $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, – обычная спектральная плотность действительного гауссовского случайного процесса.

ГЛАВА 2

МОДИФИЦИРОВАННОЕ КОНЕЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

2.1. Окна просмотра данных и частотные окна

Пусть $X(t)$, $t \in Z$, – стационарный случайный процесс со спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$. Предположим, что спектральная плотность неизвестна и требуется по T наблюдениям

$$X(0), X(1), \ldots, X(T-1) \qquad (2.1.1)$$

за процессом $X(t)$, $t \in Z$, построить ее состоятельную оценку. При построении оценки рассматривают вспомогательные статистики [3, 7, 14], такие как расширенное конечное преобразование Фурье

$$d_T(\lambda) = \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t)\right]^{-1/2} \sum_{t=0}^{T-1} X(t) h_T(t) \exp\{-it\lambda\},\ \lambda \in \Pi,$$

и расширенная периодограмма

$$I_T(\lambda) = \left|d_T(\lambda)\right|^2,\ \lambda \in \Pi,$$

использующие окна просмотра данных $h_T(t) = h\left(\frac{t}{T}\right)$, $t=\overline{0,T-1}$.

Окна просмотра данных в определении вспомогательных статистик по сравнению с обычным преобразованием Фурье, уменьшают влияние острых пиков в спектре на качество оценки и уменьшают смещение оценок спектральной плотности (см. [2, 3, 7]).

Определение 2.1.1. *Функцию* $h_T(t) = h\left(\frac{t}{T}\right)$, $t=\overline{0,T-1}$, *называют окном просмотра данных, если она удовлетворяет условиям:*

1. *$h(x)$ – неотрицательная при $x \in [0,1)$;*
2. *$h(x)$ достигает максимума, равного 1, в точке $x = 0$;*
3. *$h(x)$ обращается в нуль при $x \notin [0,1)$.*

На практике и в научных исследованиях рассматриваются также окна просмотра данных вида:

1) Функция $h(x)$ достигает максимума равного 1 в точке $x=1/2$; $h(x)$ обращается в нуль при $x\notin(0,1)$ и монотонно убывает к 0 при $x\to 0$ и $x\to 1$.

2) Функция $h(x)$ достигает максимума равного 1 в точке $x=0$; $h(x)$ обращается в нуль при $x\notin(-1,1)$ и монотонно убывает к 0 при $|x|\to 1$.

Рассмотрим случай, когда $h_T(t)=h\left(\frac{t}{T}\right)$, $t=\overline{-(T-1),(T-1)}$, тогда функцию вида

$$H^{(T)}(\lambda)=\sum_{t=-(T-1)}^{T-1} h_T(t)\exp\{-i\lambda t\}=\sum_{t=-(T-1)}^{T-1} h_T(t)\cos(\lambda t),$$

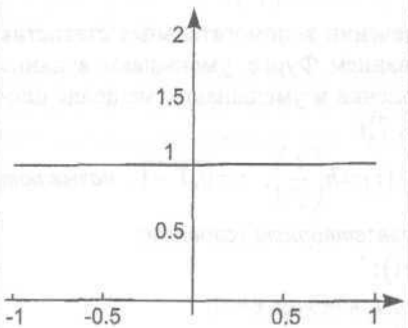
$\lambda\in\Pi$, называют частотным окном. Особенностью поведения $H^{(T)}(\lambda)$ является то, что она становится все более сконцентрированной в окрестности нуля при $T\to\infty$.

Приведем простейшие примеры (см. работу [3]) окон просмотра данных и соответствующих им частотных окон.

Окно просмотра данных | **Частотное окно**

1. Прямоугольное окно

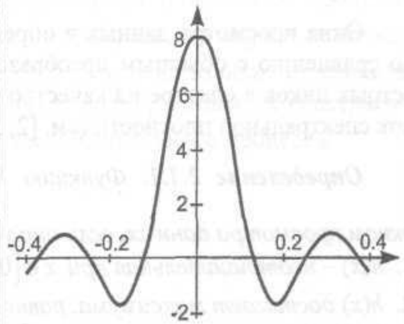
$$h(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|\ge 1.\end{cases}$$



Окно Дирихле

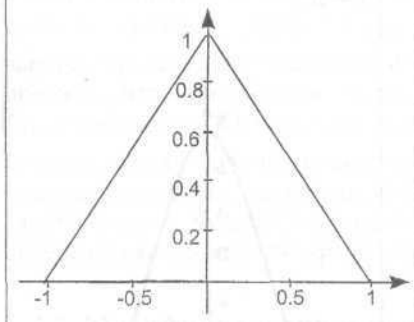
$$H^{(T)}(x)=D_T(x)=\frac{\sin(T+1/2)x}{2\pi\sin\frac{1}{2}x},$$

$T=25.$



2. Треугольное окно

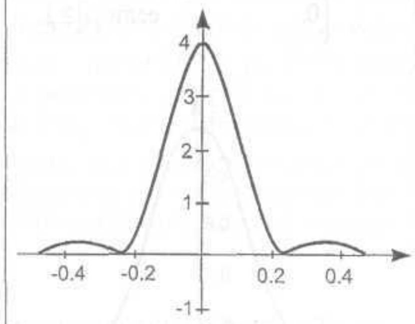
$$h(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\ge 1.\end{cases}$$



Окно Фейера

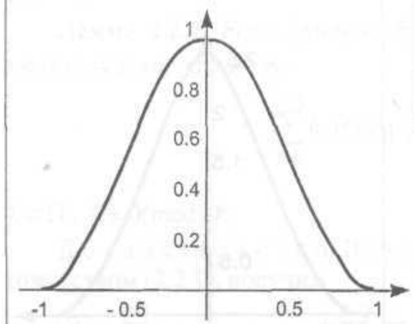
$$H^{(T)}(x)=\frac{1}{2\pi T}\left[\frac{\sin Tx/2}{\sin x/2}\right]^2,$$

T = 25.



3. Косинусоидальное окно

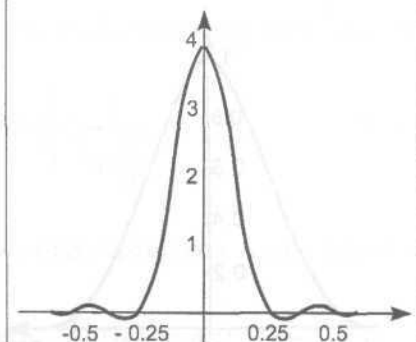
$$h(x)=\begin{cases}\cos^2\frac{\pi x}{2}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\ge 1.\end{cases}$$

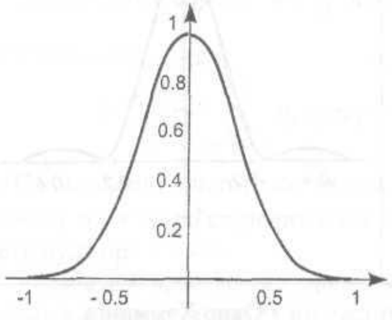
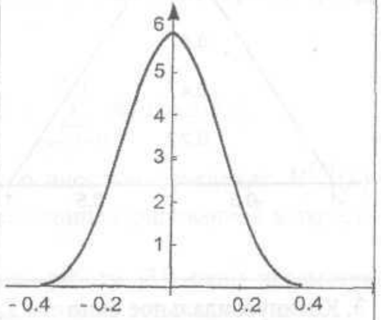
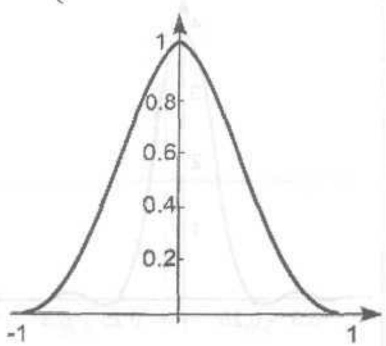
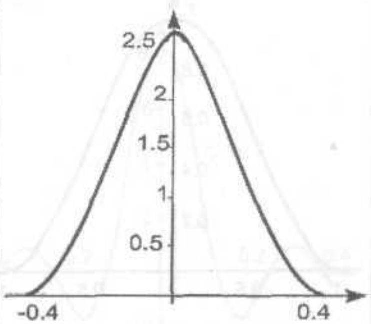


Окно Хэмминга

$$H^{(T)}(x)=\frac{1}{2}D_T(x)+\frac{1}{4}D_T\left(x-\frac{\pi}{T}\right)+$$
$$+\frac{1}{4}D_T\left(x+\frac{\pi}{T}\right),$$

T = 25.



4. Окно Валле-Пуссена Джексона, Парзена $h(x)=\begin{cases}1-6x^2(1-\lvert x\rvert), & \text{если } 0\le\lvert x\rvert<1/2,\\ 2(1-\lvert x\rvert)^3, & \text{если } 1/2\le\lvert x\rvert<1,\\ 0, & \text{если } \lvert x\rvert\ge 1.\end{cases}$ 	Окно Валле-Пуссена Джексона, Парзена $H^{(T)}(x)=\frac{2+\cos x}{4\pi T^3}\left[\frac{\sin Tx/4}{\sin x/4}\right]^4,$ $T=25.$ 
5. Окно Бохмана $h(x)=\begin{cases}(1-\lvert x\rvert)\cos(\pi x)+\frac{1}{\pi}\sin(\pi\lvert x\rvert), & \\ & \text{если } \lvert x\rvert<1,\\ 0, & \text{если } \lvert x\rvert\ge 1.\end{cases}$ 	Окно Бохмана $H^{(T)}(x)=T\cdot 2\pi\frac{(1+\cos Tx)}{(T^2x^2-\pi^2)^2},$ $T=25.$ 

В дальнейшем аналогично [3] будем рассматривать частотные окна вида

$$H^{(T)}(\lambda)=\sum_{t=0}^{T-1}h_T(t)\exp\{-i\lambda t\}. \tag{2.1.2}$$

Пусть $X(t)$, $t\in Z$, – комплекснозначный (действительный) устойчивый стационарный случайный процесс с характеристическим показателем α, $\alpha\in(0,2)$, $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, – спектральная плотность рассматриваемого процесса, определяемая соотношениями (1.2.2) и (1.2.6). Предположим, что спектральная плотность неизвестна и требуется по T наблюдениям вида (2.1.1) за процессом $X(t)$, $t\in Z$, построить ее состоятельную оценку. При построении оценки будем рассматривать вспомогательные статистики, такие как модифицированное конечное преобразование Фурье и модифицированная периодограмма, использующиеся в определениях окна просмотра данных.

2.2. Модифицированное конечное преобразование Фурье комплекснозначного устойчивого случайного процесса

Введем в рассмотрение и исследуем свойства некоторых функций, которые будем использовать для построения состоятельной оценки спектральной плотности.

Лемма 2.2.1 [1]. *Имеет место тождество*

$$\sum_{k=m}^{n}u_kv_k=\sum_{k=m}^{n-1}U_k(v_k-v_{k+1})-U_{-1}v_0+U_nv_n, \tag{2.2.1}$$

называемое преобразованием Абеля, где $0\le m\le n$, $U_k=u_0+\ldots+u_k$, $k\ge 0$, $U_{-1}=0$.

Лемма 2.2.2. *Если функция* $h_T(t)$, $t\in Z$, *имеет ограниченную постоянной L вариацию, то*

$$\left|\sum_{t=0}^{T-1}h_T(t)\exp\{-i\lambda t\}\right|\le\frac{L}{\left|\sin\frac{\lambda}{2}\right|}, \tag{2.2.2}$$

$\lambda\in\Pi$, $\lambda\ne 0(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя преобразование Абеля, заданное тождеством (2.2.1), получим

$$\sum_{t=0}^{T-1}h_T(t)\exp\{-i\lambda t\}=\sum_{t=0}^{T-2}\sum_{l=0}^{t}\exp\{-i\lambda l\}(h_T(t)-h_T(t+1))+$$

$$+\sum_{l=0}^{T-1}\exp\{-i\lambda l\}h_T(T-1)=\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{l=0}^{t}\exp\{-i\lambda l\}\left(h_T(t)-h_T(t+1)\right),$$

так как $h_T(T)=0$. Воспользовавшись равенством

$$\sum_{l=0}^{t}\exp\{-i\lambda l\}=\frac{\sin(t\lambda)}{\sin\frac{\lambda}{2}}\exp\left\{-\frac{it\lambda}{2}\right\},$$

неравенством

$$\left|\frac{\sin(t\lambda)}{\sin\frac{\lambda}{2}}\right|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{\lambda}{2}\right|},$$

для $\lambda\ne 0(\mathrm{mod}\,2\pi)$, а также, учитывая ограниченность вариации функции $h_T(t)$ постоянной L, получим

$$\left|\sum_{t=0}^{T-1}h_T(t)\exp\{-i\lambda t\}\right|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{\lambda}{2}\right|}\sum_{t=0}^{T-1}\left|h_T(t)-h_T(t+1)\right|\le\frac{L}{\left|\sin\frac{\lambda}{2}\right|},$$

что и требовалось показать. Лемма доказана.

Введем в рассмотрение функцию

$$H_T(\lambda)=A_T H^{(T)}(\lambda),\tag{2.2.3}$$

где

$$A_T=\left[\frac{1}{B_\alpha^{(T)}}\right]^{1/\alpha},\tag{2.2.4}$$

$$B_\alpha^{(T)}=\int_\Pi\left|H^{(T)}(\lambda)\right|^\alpha d\lambda,\tag{2.2.5}$$

а $H^{(T)}(\lambda)$ задана соотношением (2.1.2).

Лемма 2.2.3. *Если выполнено соотношение*

$$A_T^{-\alpha}\xrightarrow[T\to\infty]{}\infty,\tag{2.2.6}$$

то последовательность функций $|H_T(\lambda)|^\alpha$, $\lambda\in\Pi$, $T=1,2,\ldots$, *является ядром на* Π, $\alpha\in(0,2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применив соотношения (2.2.3), (2.2.4) и (2.2.5), получим

$$\int_\Pi|H_T(\lambda)|^\alpha d\lambda=\int_\Pi\left|A_T H^{(T)}(\lambda)\right|^\alpha d\lambda=1.\tag{2.2.7}$$

Далее, используя лемму 2.2.2, имеем

$$\int_{\Pi\setminus\{|\lambda|\le\delta\}}|H_T(\lambda)|^\alpha d\lambda=A_T^\alpha\int_{\Pi\setminus\{|\lambda|\le\delta\}}\left|H^{(T)}(\lambda)\right|^\alpha d\lambda\le\frac{2(\pi-\delta)L^\alpha}{A_T^{-\alpha}\left|\sin\frac{\delta}{2}\right|^\alpha}$$

для некоторого $0<\delta\le\pi$.

Так как выполнено соотношение (2.2.6), то

$$\int_{\Pi\setminus\{|\lambda|\le\delta\}}|H_T(\lambda)|^\alpha d\lambda\xrightarrow[T\to\infty]{}0,\tag{2.2.8}$$

$0<\delta\le\pi$, $\alpha\in(0,2)$, $\lambda\in\Pi$. Лемма доказана.

Определение 2.2.1. *Модифицированным конечным преобразованием Фурье наблюдений* (2.1.1) *процесса* $X(t)$, $t\in Z$, *называют статистику вида*

$$d_T(\lambda)=A_T\,\mathrm{Re}\sum_{t=0}^{T-1}h_T(t)\exp\{-i\lambda t\}X(t),\tag{2.2.9}$$

где $\lambda\in\Pi$, A_T *задана равенством* (2.2.4), *а* $h_T(t)$ *– окно просмотра данных.*

Заметим, что статистика $d_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, является периодической с периодом 2π.

Приведем некоторые свойства модифицированного конечного преобразования Фурье.

Лемма 2.2.4. *Для любого натурального* n, *любых действительных чисел* a_k *и любых точек* $\lambda_k\in\Pi$, $k=\overline{1,n}$, *статистика* $d_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, *удовлетворяет соотношению*

$$E\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}a_k d_T(\lambda_k)\right\}=\exp\left\{-c_\alpha\int_\Pi\left|\sum_{k=1}^{n}a_k H_T(\mu-\lambda_k)\right|^\alpha f(\mu)\,d\mu\right\},\tag{2.2.10}$$

где c_α, $H_T(\mu)$ *задаются соответственно равенствами* (1.2.4), (2.2.3), $\alpha\in(0,2)$, $f(\mu)$, $\mu\in\Pi$, *– спектральная плотность рассматриваемого процесса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя определение $d_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, и соотношение (1.2.3), имеем

$$E\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}a_k d_T(\lambda_k)\right\}=E\exp\left\{i\,\mathrm{Re}\,A_T\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{t=0}^{T-1}h_T(t)\exp\{-i\lambda_k t\}X(t)\right\}=$$

$$= \exp\left\{-c_\alpha \int_\Pi \left|\sum_{k=1}^n a_k A_T \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) \exp\{it(\mu-\lambda_k)\}\right|^\alpha f(\mu)d\mu\right\} =$$

$$= \exp\left\{-c_\alpha \int_\Pi \left|\sum_{k=1}^n a_k H_T(\mu-\lambda_k)\right|^\alpha f(\mu)d\mu\right\},$$

где c_α задается равенством (1.2.4), а $H_T(\mu)$, $\mu \in \Pi$, – (2.2.3). Лемма доказана.

Введем в рассмотрение функцию

$$\gamma_T(\lambda) = \int_\Pi |H_T(\mu-\lambda)|^\alpha f(\mu)d\mu, \qquad (2.2.11)$$

$\lambda \in \Pi$, $H_T(\mu)$ задается (2.2.3), $T = 1, 2, \ldots$, $\alpha \in (0,2)$. Заметим, что так как подынтегральные функции являются периодическими с периодом 2π, равенство (2.2.11) можно переписать в следующем виде:

$$\gamma_T(\lambda) = \int_\Pi |H_T(\nu)|^\alpha f(\nu+\lambda)d\nu.$$

Лемма 2.2.5. *Для статистики* (2.2.9) *имеет место следующее соотношение*:

$$E\exp\{ird_T(\lambda)\} = \exp\left\{-c_\alpha |r|^\alpha \gamma_T(\lambda)\right\}, \qquad (2.2.12)$$

где $\lambda \in \Pi$, $r \in R$, $\alpha \in (0,2)$, *то есть статистика* $d_T(\lambda)$ *имеет строго симметричное устойчивое распределение с тем же характеристическим показателем* α, *что и рассматриваемый процесс* $X(t)$, $t \in Z$, *где* c_α *задается равенством* (1.2.4), *а функция* $\gamma_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, *определена соотношением* (2.2.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из доказательства леммы 2.2.4, если положить $n = 1$, $a_1 = r$, $\lambda_1 = \lambda$.

Лемма 2.2.6. *Если спектральная плотность* $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, *непрерывна в точке* $\lambda_0 \in \Pi$ *и ограничена на* Π, *то*

$$\lim_{T\to\infty} \gamma_T(\lambda_0) = f(\lambda_0), \qquad (2.2.13)$$

где $\gamma_T(\lambda)$ *определена* (2.2.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя равенство (2.2.7), имеем

$$\left|\int_\Pi |H_T(\nu)|^\alpha f(\nu+\lambda_0)d\nu - f(\lambda_0)\right| = \left|\int_\Pi |H_T(\nu)|^\alpha (f(\nu+\lambda_0) - f(\lambda_0))d\nu\right| \le$$

$$\le \int_\Pi |H_T(\nu)|^\alpha |f(\nu+\lambda_0) - f(\lambda_0)|d\nu = \int_{\{|\nu|\le\delta\}} |H_T(\nu)|^\alpha |f(\nu+\lambda_0) - f(\lambda_0)|d\nu +$$

$$+ \int_{\Pi\setminus\{|\nu|\le\delta\}} |H_T(\nu)|^\alpha |f(\nu+\lambda_0) - f(\lambda_0)|d\nu, \qquad (2.2.14)$$

где $0 < \delta \le \pi$.

Так как функция $f(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda_0 \in \Pi$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех ν, удовлетворяющих неравенству $|\nu - \lambda_0| \le \delta$, выполняется

$$|f(\nu) - f(\lambda_0)| \le \varepsilon.$$

$$\left|\int_\Pi |H_T(\nu)|^\alpha f(\nu+\lambda_0)d\nu - f(\lambda_0)\right| \le \varepsilon \int_{\{|\nu|\le\delta\}} |H_T(\nu)|^\alpha d\nu +$$

$$+ 2\max_{\nu\in\Pi} f(\nu) \int_{\Pi\setminus\{|\nu|\le\delta\}} |H_T(\nu)|^\alpha d\nu.$$

Таким образом,

$$\int_{\{|\nu|\le\delta\}} |H_T(\nu)|^\alpha |f(\nu+\lambda_0) - f(\lambda_0)|d\nu \le \varepsilon \int_{\{|\nu|\le\delta\}} |H_T(\nu)|^\alpha d\nu.$$

Поскольку $f(\lambda)$ ограничена на Π, то

$$\int_{\Pi\setminus\{|\nu|\le\delta\}} |H_T(\nu)|^\alpha |f(\nu+\lambda_0) - f(\lambda_0)|d\nu \le 2\max_{\nu\in\Pi} f(\nu) \int_{\Pi\setminus\{|\nu|\le\delta\}} |H_T(\nu)|^\alpha d\nu.$$

Итак, в (2.2.14) имеем

С учетом выбора ε и применив соотношение (2.2.8), получим требуемый результат. Лемма доказана.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, *непрерывна в точке* $\lambda_0 \in \Pi$ *и ограничена на* Π, *тогда для статистики* $d_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, *определенной равенством* (2.2.9), *справедливо соотношение*

$$\lim_{T\to\infty} E\exp\{ird_T(\lambda_0)\} = \exp\{-c_\alpha |r|^\alpha f(\lambda_0)\}, \qquad (2.2.15)$$

где $r \in R$, $\alpha \in (0, 2)$, *а* c_α *задается равенством* (1.2.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая соотношение (2.2.12) и неравенство (П.5), получим

$$\left|E\exp\{ird_T(\lambda_0)\} - \exp\{-c_\alpha |r|^\alpha f(\lambda_0)\}\right| =$$

$$= \left| \exp\left\{-c_\alpha |r|^\alpha \gamma_T(\lambda_0)\right\} - \exp\{-c_\alpha |r|^\alpha f(\lambda_0)\}\right| \le$$

$$\le c_\alpha |r|^\alpha \left|\gamma_T(\lambda_0) - f(\lambda_0)\right|.$$

Используя соотношение (2.2.13), имеем (2.2.15). Теорема доказана.

2.3. Модифицированное конечное преобразование Фурье действительного устойчивого случайного процесса

Пусть $X(t)$, $t \in Z$, – действительный устойчивый стационарный случайный процесс, имеющий спектральное представление (1.2.5), с характеристическим показателем α, $\alpha \in (0,2)$, и спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$. Пусть (2.1.1) наблюдения за рассматриваемым процессом.

Определение 2.3.1 [25]. *Модифицированным конечным преобразованием Фурье наблюдений* (2.1.1) *за процессом* $X(t)$, $t \in Z$, *называют статистику вида*

$$d_T(\lambda) = Q(\lambda) A_T \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) X(t) \cos(\lambda t), \qquad (2.3.1)$$

где

$$Q(\lambda) = \begin{cases} 2^{1-1/\alpha}, & \lambda \ne 0,\ 0 < \alpha \le 1, \\ 2^{-1/\alpha}, & \lambda \ne 0,\ 1 < \alpha < 2, \\ 1, & \lambda = 0, \end{cases} \qquad (2.3.2)$$

A_T *задана соотношением* (2.2.4), $h_T(t)$ *– окно просмотра данных.*

Приведем некоторые свойства модифицированного конечного преобразования Фурье.

Лемма 2.3.1. *Для любого натурального n, для любых действительных чисел a_k и любых точек $\lambda_k \in \Pi$, $k = \overline{1,n}$, статистика $d_T(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, удовлетворяет следующему соотношению*

$$E \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} a_k d_T(\lambda_k) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -c_\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \int_\Pi \left| \sum_{k=1}^{n} a_k Q(\lambda_k) \left(H_T(u+\lambda_k) + H_T(u-\lambda_k)\right) \right|^\alpha f(u)du \right\}, \qquad (2.3.3)$$

где c_α, $Q(\lambda)$, $H_T(\lambda)$ задаются соотношениями (1.2.4), (2.3.2) *и* (2.2.3) *соответственно,* $\alpha \in (0,2)$, $f(u)$, $u \in \Pi$, *– спектральная плотность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим левую часть равенства (2.3.3). Воспользовавшись соотношением (2.3.1) и учитывая (1.2.3), получим

$$E \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} a_k d_T(\lambda_k) \right\} =$$

$$= E \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} a_k Q(\lambda_k) A_T \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) X(t) \cos(\lambda_k t) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -c_\alpha \int_\Pi \left| \sum_{k=1}^{n} a_k Q(\lambda_k) A_T \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) \cos(\lambda_k t) \exp\{iut\} \right|^\alpha f(u)du \right\}.$$

Учитывая равенство $\cos x = \dfrac{\exp\{-ix\} + \exp\{ix\}}{2}$, имеем

$$E \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} a_k d_T(\lambda_k) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -c_\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \int_\Pi \left| \sum_{k=1}^{n} a_k Q(\lambda_k) A_T \left(\sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) \exp\{-i\lambda_k t\} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) \exp\{i\lambda_k t\} \exp\{iut\} \right) \right|^\alpha f(u)du \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -c_\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \int_\Pi \left| \sum_{k=1}^{n} a_k Q(\lambda_k) A_T \left(\sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) \exp\{-i(\lambda_k - u)t\} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) \exp\{-i(\lambda_k - u)t\} \right) \right|^\alpha f(u)du \right\}.$$

Сделав замену переменной интегрирования $u = -u$, правая часть исходного равенства равна

$$\exp\left\{ -c_\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \int_\Pi \left| \sum_{k=1}^{n} a_k Q(\lambda_k) A_T \left(\sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) \exp\{-i(u+\lambda_k)t\} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) \exp\{-i(u-\lambda_k)t\} \right) \right|^\alpha f(u)du \right\}.$$

Воспользовавшись соотношениями (2.1.2) и (2.2.3), получим

$$E\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}a_k d_T(\lambda_k)\right\}=$$

$$=\exp\left\{-c_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\int_\Pi\left|\sum_{k=1}^{n}a_k Q(\lambda_k)A_T\left(H^{(T)}(u+\lambda_k)+H^{(T)}(u-\lambda_k)\right)\right|^\alpha f(u)du\right\}=$$

$$=\exp\left\{-c_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\int_\Pi\left|\sum_{k=1}^{n}a_k Q(\lambda_k)\left(H_T(u+\lambda_k)+H_T(u-\lambda_k)\right)\right|^\alpha f(u)du\right\}.$$

Лемма доказана.

Введем в рассмотрение функцию

$$\gamma_T(\lambda)=\left(\frac{1}{2}Q(\lambda)\right)^\alpha\int_\Pi\left|H_T(u+\lambda)+H_T(u-\lambda)\right|^\alpha f(u)du, \qquad (2.3.4)$$

$\lambda\in\Pi$, $\alpha\in(0,2)$, $Q(\lambda)$, $H_T(\lambda)$ заданы равенствами (2.3.2) и (2.2.3) соответственно.

Лемма 2.3.2. *Для статистики* (2.3.1) *имеет место следующее соотношение:*

$$E\exp\{ird_T(\lambda)\}=\exp\left\{-c_\alpha|r|^\alpha\gamma_T(\lambda)\right\}, \qquad (2.3.5)$$

где $\lambda\in\Pi$, $r\in R$, $\alpha\in(0,2)$, *то есть статистика* $d_T(\lambda)$ *имеет строго симметричное устойчивое распределение с тем же характеристическим показателем* α, *что и рассматриваемый процесс* $X(t)$, $t\in Z$, *где* c_α *задается равенством* (1.2.4), *а функция* $\gamma_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, *определена соотношением* (2.3.4).

Доказательство вытекает из доказательства леммы 2.3.1, если положить $n=1$, $\lambda_1=\lambda$, $a_1=r$.

Лемма 2.3.3. *Если спектральная плотность* $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, *непрерывна в точке* $\lambda_0\in\Pi$ *и ограничена на* Π, *то*

$$\lim_{T\to\infty}\gamma_T(\lambda_0)=f(\lambda_0), \qquad (2.3.6)$$

где $\gamma_T(\lambda)$ *задана соотношением* (2.3.4).

Доказательство. Рассмотрим выражение $|\gamma_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)|$. Учитывая соотношение (2.3.4), получим

$$|\gamma_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)|=\left|\left(\frac{1}{2}Q(\lambda_0)\right)^\alpha\int_\Pi\left|H_T(u+\lambda_0)+H_T(u-\lambda_0)\right|^\alpha f(u)du-f(\lambda_0)\right|.$$

Воспользовавшись неравенствами (П.1) и (П.2), равенством (2.3.2), имеем

$$|\gamma_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)|\le\left|\frac{1}{2}\int_\Pi|H_T(u+\lambda_0)|^\alpha f(u)du+\frac{1}{2}\int_\Pi|H_T(u-\lambda_0)|^\alpha f(u)du-f(\lambda_0)\right|.$$

Сделаем в первом слагаемом замену переменной интегрирования $u+\lambda_0=u$, а во втором $u-\lambda_0=u$, получим

$$|\gamma_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)|\le$$

$$\le\left|\frac{1}{2}\int_\Pi|H_T(u)|^\alpha f(u-\lambda_0)du+\frac{1}{2}\int_\Pi|H_T(u)|^\alpha f(u+\lambda_0)du-f(\lambda_0)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int_\Pi|H_T(u)|^\alpha\left|f(u-\lambda_0)-f(-\lambda_0)\right|du+$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Pi|H_T(u)|^\alpha\left|f(u+\lambda_0)-f(\lambda_0)\right|du. \qquad (2.3.7)$$

Используя лемму 2.2.6, получим требуемый результат.

Лемма доказана.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, *непрерывна в точке* $\lambda_0\in\Pi$ *и ограничена на* Π, *тогда для статистики* $d_T(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, *определенной равенством* (2.3.1), *справедливо соотношение*

$$\lim_{T\to\infty}E\exp\{ird_T(\lambda_0)\}=\exp\{-c_\alpha|r|^\alpha f(\lambda_0)\}, \qquad (2.3.8)$$

где $r\in R$, $\alpha\in(0,2)$, *а* c_α *задается равенством* (1.2.4).

Доказательство. Учитывая соотношение (2.3.5) и неравенство (П.5), получим

$$\left|E\exp\{ird_T(\lambda_0)\}-\exp\{-c_\alpha|r|^\alpha f(\lambda_0)\}\right|=$$

$$=\left|\exp\left\{-c_\alpha|r|^\alpha\gamma_T(\lambda_0)\right\}-\exp\{-c_\alpha|r|^\alpha f(\lambda_0)\}\right|\le\le c_\alpha|r|^\alpha|\gamma_T(\lambda_0)-f(\lambda_0)|.$$

Используя соотношение (2.3.6), имеем требуемое. Теорема доказана.